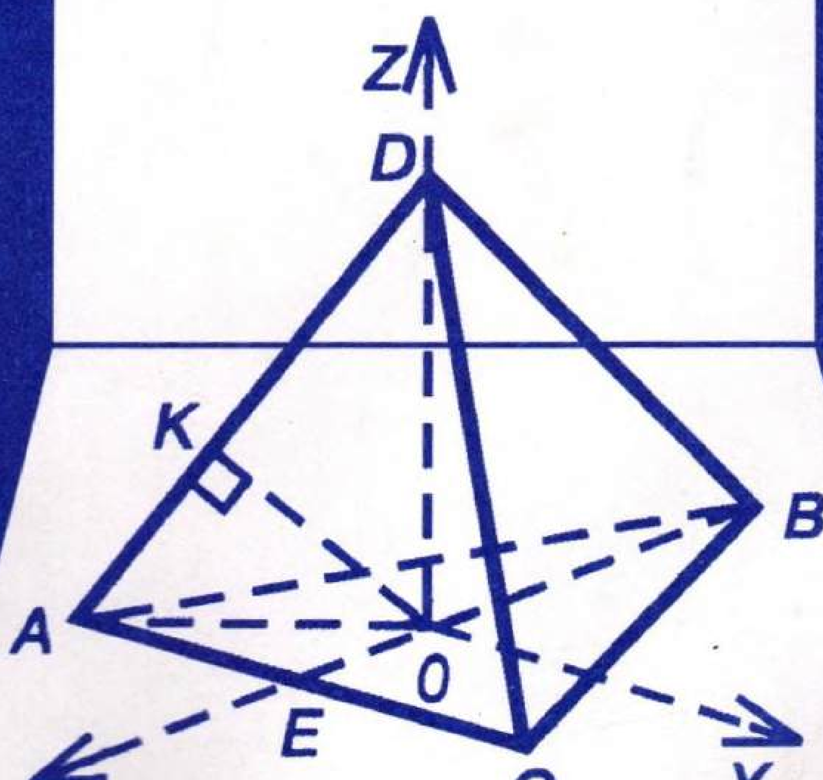
Б. Г. ЗИВ

ГЕОМЕТРИЯДӘН ДИДАКТИК МАТЕРИАЛЛАР



11 СЫЙНЫФ

«МӘГАРИФ» НӘШРИЯТЫ

Б. Г. ЗИВ

ГЕОМЕТРИЯДӘН ДИДАКТИК МАТЕРИАЛЛАР

Татар урта гомуми белем мәктәбенең
11 нче сыйныфы өчен

КАЗАН • «МӘГАРИФ» НӘШРИЯТЫ
МОСКВА • «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2001

УДК 514
ББК 74.262.21
З-59

Зив Б. Г.

Дидактические материалы по геометрии для 11 класса.— М.: Просвещение, 1995.

Шушы китап материалларын нәшрият рөхсәтеннән башка янадан бастырып чыгару «Автор хокукы һәм эргәдәш хокуклар турында» Россия Федерациясе Законын бозу була. Моның өчен закон нигезендә җавапка тарту каралган.

Зив Б. Г.

З-59 Геометриядән дидактик материаллар: Татар урта гомуми белем мәкт. 11 нче с-фы өчен / Русчадан Р. С. Вафина тәрж.— Казан: Мәгариф, 2001.—127 б.: рәс. б-н.
ISBN 5-7761-0556-0

Ярдәмлектә мөстәкыйль һәм контроль эшләр, шулай ук математик диктантлар бирелгән. Ул Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Л. С. Киселева, Э. Г. Познякның «Геометрия, 10—11» дәреслегенә туры китереп төзелгән, аны шулай ук башка дәреслекләр белән эшләгәндә дә файдаланырга мөмкин.

БЗ—5(64)—99—98/99

ISBN 5-7761-0556-0

© Издательство «Просвещение», 1995
© Художественное оформление. Издательство «Просвещение», 2000
Все права защищены
© Татарчага тәрҗемә, «Мәгариф» нәшрияты 2001

КЕРЕШ

Ярдәмлектә 19 мөстәкыйль, 1 өстәмә мөстәкыйль, 4 кабатлау эше, 3 математик диктант һәм 4 контроль эш бирелә. Мөстәкыйль эшләр — **М** хәрефе һәм тиңдәш номеры белән; кабатлау эшләре — **Кб**, өстәмә мөстәкыйль эш — **ӨМ**, математик диктант — **МД**, ә контроль эшләр **К** хәрефе белән билгеләнгән.

Ярдәмлектәге мөстәкыйль эшләрнең төп максаты — укучыларның мәсьәләләр чишү буенча эшчәнлеген, аларның индивидуаль үзенчәлекләрен һәм хәзерлек дәрәҗәсен исәпкә алып оештыруда укытучыга ярдәм итү. Моннан тыш, мөстәкыйль эшләрне укучыларның белем һәм күнекмәләрен тикшерү өчен дә файдаланырга мөмкин. Алар сигез вариантта бирелгән. Һәрбер эшнең беренче һәм икенче вариантындагы биремнәрне уңышлы үтәп чыгу өчен, укучыларга минималь программа таләпләре дәрәҗәсендәге белемнәрне куллану җитә. Өченче һәм дүртенче вариантлар уртача катлаулылыктагы мәсьәләләрдән тора. Бу мәсьәләләрне чишү гадәти ситуацияләрдә төшенчәләрне күрә белүне, гадәти шартларда яки беркадәр үзгәреш булган очракта белемнәрне куллана белүне күздә тота. Өченче һәм дүртенче вариант мәсьәләләре катлаулылыгы буенча дәреслектәге төп мәсьәләләрнең күпчелегенә якынча туры килә. Бишенче һәм алтынчы вариантлар яхшырак әзерлекле укучыларга исәпләнгән. Бу вариант мәсьәләләрен чишкәндә, белемнәрне катлаулырак ситуацияләрдә куллана белү, шулай ук исәпләү һәм бердәй рәвешүзгәртү күнекмәләренең шактый югары дәрәҗәдә булуы таләп ителә. Катлаулылыгы буенча бу мәсьәләләр дәреслекнең иң авыр саналган төп һәм өстәмә мәсьәләләре белән бер дәрәҗәдә.

Җиденче һәм сигезенче вариант мәсьәләләрен чишкәндә белемнәрне иҗади рәвештә куллана белү таләп ителә. Бирелгән катлаулы геометрик ситуацияләрне анализларга, мөстәкыйль рәвештә яңа фактлар ачарга, алар арасындагы бәйләнешләрне ачыкларга туры килә. Җиденче һәм сигезенче вариант мәсьәләләрен укучыларга класс белән бергә төп эшне үтәп чыкканнан соң калган вакытта бирергә яки өйдә эшләү өчен мәҗбүри булмаган биремнәр сыйфатында файдаланырга, шулай ук математика түгәрәгендә яки факультатив дәресләрдә тәкъдим итәргә мөмкин. Укытучыга һәрбер эшнең һәр биремен эшләтеп бетерү мәҗбүри түгел. Ярдәмлектә тупланган эшләр җыелмасы укытучыга һәр дәрестә, дәреснең максатыннан, эш вакытыннан һәм укучыларның хәзерлегеннән чыгып, тиешле биремнәрне сайлап алырга мөмкинлек бирә.

Кабатлау эшләре якынча бер үк катлаулылык дәрәҗәсендәге дүрт вариантта бирелә. Алар укытучыга 10—11 класс темаларын комплекслы кабатларга мөмкинлек бирә. Һәрбер эш төрлечә катлаулылыктагы зур булмаган берничә мәсьәләдән яки сораудан тора. Алар һәрбер укучыга геометрия курсының аерым сораулары буенча көчләрен сынап карарга һәм имтиханнарга яхшырак хәзерләнергә мөмкинлек бирә.

Математик диктантлар укучыларның теоретик белемнәрен системалаштыру өчен хезмәт итә һәм аларны контроль эшләр алдыннан эшләтергә мөмкин. Диктант теоремаларны турыдан-туры куллану өчен кирәкле булган кечерек мәсьәләләр җыелмасын тәшкил итә. Диктант барышында укытучы сорау яки мәсьәлә тәкъдим итә, ә укучы берничә минут эчендә аңа җавап бирергә тиеш. Җавап өчен кирәкле вакытны укытучы, сорауның катлаулылыгыннан һәм классның хәзерлегеннән чыгып, үзе көйли. Мондый эш 30—35 минут эчендә башкарылырга мөмкин, ә аннан соң укытучы, класс белән бергә, укучыларның җавапларын тикшерә, ялгышларны анализлый. Кайсы мәсьәләләрне текст белән, ә кайсыларын сызым ярдәмендә бирүне укытучы үзе хәл итә. Шулай ук, диктантның барлык сорауларын тәкъдим итмичә, бер өлешен генә бирү дә укытучы карамагында. Математик диктант биремнәрен геометрия буенча имтиханда өстәмә сораулар җыелмасы сыйфатында да файдаланырга мөмкин.

Контроль эшләр дүрт вариантта төзелгән. Алар дәреслекнең барлык өч темасы һәм геометриянең тулы курсы буенча белемнәрне йомгаклап тикшерү өчен кулланыла. Барлык вариантлар да якынча бер үк катлаулылыкта, һәрбер вариантта * тамгасы белән билгеләнгән катлаулырак мәсьәләләр дә китерелә. Укучыларга билге эшнең төп өлеше өчен генә куела, ә өстәмә мәсьәләне чишкән укучыларга бу эш өчен аерым билге куярга мөмкин.

Ярдәмлекнең икенче яртысында барлык мөстәкыйль эшләрнең, кабатлау һәм контроль эшләренең җаваплары китерелә. Иң катлаулы эшләргә күрсәтмәләр бирелә яки чишелешләре аңлатыла.

Тәкъдим ителгән чишелешләр мөмкин табылган бердәнбер чишелеш дип саналмый.

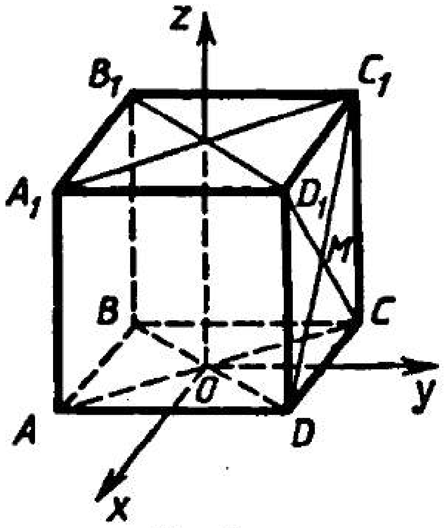
Автор.

МӨСТӘКЫЙЛЬ ЭШЛӘР

ВАРИАНТ 1

М—1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырылган (рәс. 1), A (2; −2; 0).
   1) Кубның калган барлык түбәләрнең координаталарын табыгыз.
   2) $\vec{OД}$, $\vec{OC_1}$, $\vec{OM}$ векторларының координаталарын табыгыз һәм аларны $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.
2. $\vec{a}$ {2; −1; 3}, $\vec{b}$ {−3; 2; 1}, $\vec{c}$ {−10; 6; −4} векторлары бирелгән. $\vec{a}-\vec{b}$ һәм $\vec{c}$ векторлары коллинеар булырмы?



Рәс. 1

М—2

1. $\vec{a}$ {−2; 1; −1} һәм $\vec{b}$ {1; −3; 2} векторлары бирелгән. $|\vec{a}+2\vec{b}|$ һәм $|\vec{a}|+|2\vec{b}|$ векторларын табыгыз.
2. ABC өчпочмагында BM — медиана, A (−1; 2; 2), B (2; −2; −6), M (1; 1; −1).
   1) C ноктасының координаталарын табыгыз.
   2) BC ягының озынлыгын табыгыз.
   3) $\vec{BC}$ векторын $\vec{i}$, $\vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.

М—3

1. $DABC$ төзек тетраэдрының кабыргалары a га тигез, K — BC ягының уртасы. Табыгыз:
   1) $\vec{DA}\cdot\vec{AK}$;
   2) $\vec{DA}\cdot\vec{BC}$.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында M ноктасы — DD_1C_1C кырының үзәге. $\vec{AM}$ һәм $\vec{BD_1}$ векторлары арасындагы почмак кысынкымы, турымы яисә җәенкеме?

М—4

1. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 135°$. $\vec{a} + \vec{b}$ һәм $\vec{a} - 2\vec{b}$ векторлары арасындагы почмакны табыгыз.
2. $DABC$ тетраэдрының нигезендә тигезьянлы ABC өчпочмагы ята, $AB = AC$, $\angle DAC = \angle DAB$. Векторларны кулланып, $AD \perp BC$ икәнен исбатлагыз.

М—5

1. а) Координаталар башлангычына карата үзәк симметрия;
   б) Oxy яссылыгына карата көзгечә симметрия вакытында A (100; 200; 1) ноктасы күчкән нокталарның координаталарын табыгыз.
2. Хәрәкәт вакытында өчпочмакның үзенә тигез булган өчпочмакка чагылуын исбатлагыз.

М—6

1. Яссылыкка перпендикуляр булган турының хәрәкәт вакытында бу яссылыкка перпендикуляр турыга чагылуын исбатлагыз.
2. 1 нче мәсьәләдә исбатланганнан чыгып, әгәр ике параллель турының берсе яссылыкка перпендикуляр булса, икенчесенең дә бу яссылыкка перпендикуляр булуын исбатлагыз.

М—7

1. Цилиндрның төзүчесе аша ике кисем үткәрелгән, аларның берсе — мәйданы S ка тигез булган күчәр кисеме. Кисем яссылыклары арасындагы почмак 30° ка тигез. Икенче кисемнең мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек призма эченә цилиндр камалган. Әгәр призма нигезенең ягы $2\sqrt{3}$ кә, биеклеге 3 кә тигез булса, цилиндрның өслек мәйданын табыгыз.

М—8

1. Конусның түбәсе аша конус нигезен 90° лы дуганы тартып торучы a озынлыгындагы хорда буенча кисеп үтүче яссылык үткәрелгән. Конусның төзүчеләре арасындагы иң зур почмак 60° ка тигез. Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. Кисек конус нигезләренең әйләнәләре озынлыгы 4 һәм 10 га тигез. Конусның биеклеге 4 кә тигез. Кисек конусның өслек мәйданын табыгыз.

М—9

1. Катетлары 3 һәм 4 кә тигез булган турыпочмаклы өчпочмак гипотенуза буйлап үтүче туры тирәсендә әйләнә. Әйләнү җисеменең өслек мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезнең ягы a га тигез, ә ян кырлары нигез яссылыгына 45° лы почмак ясап авышканнар. Пирамидага камалган конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—10

1. $A\ (0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{5})$ ноктасы үзәге $O\ (3;\ 0;\ 0)$ булган сфера өстендә ята.
   а) Сфераның тигезләмәсен языгыз.
   б) Координаталары $(5;\ 0;\ 2\sqrt{3})$ һәм $(4;\ -1;\ 0)$ булган нокталар бу сфера өстендә ятамы?
2. Катетлары 15 һәм $\sqrt{351}$ булган турыпочмаклы өчпочмакның түбәләре шар өслегендә ята. Шар үзәгеннән өчпочмак яссылыгына кадәр ераклык 5 кә тигез булса, шарның радиусын табыгыз.

М—11

1. Сфера белән аның үзәгеннән 8 ераклыгында ятучы яссылык кисешкән сызыкның озынлыгы 12π гә тигез. Сфераның өслек мәйданың табыгыз.
2. Яссылык шарны кисеп уза. Кисешү сызыгы нокталарының берсенә үткәрелгән диаметр белән бу яссылык арасындагы почмак 45° ка тигез. Шарның диаметры $4\sqrt{3}$ кә тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.

М—12

1. Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезнең ягы 3 кә тигез, ә ян кабыргалар нигезгә 60° лы почмак ясап авышканнар. Пирамиданы камаучы сфераның радиусын табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек призмага сфера камалган. Призманың тулы өслеге мәйданының сфера мәйданына чагыштырмасын табыгыз.

М—13

1. Турыпочмаклы параллелепипедның үлчәмнәре чагыштырмасы $2:3:4$ кә тигез. Параллелепипедның диагонале $\sqrt{29}$ га тигез. Аның күләмен табыгыз.
2. Бер почмагы 30° ка тигез булган турыпочмаклы өчпочмак туры призманың нигезе булып хезмәт итә. Туры почмак түбәсе аша үтә торган ян кабыргадан алып каршы ятучы ян кырга кадәр ераклык ян кабыргага һәм 6 га тигез. Призманың күләмен табыгыз.

М—14

1. Туры призманың нигезендә яклары 10, 10 һәм 12 гә тигез булган өчпочмак ята. Аскы нигезнең зуррак ягы һәм каршы ятучы ян кабырганың уртасы аша, нигез яссылыгына 60° лы почмак ясап, яссылык үткәрелгән. Призманың күләмен табыгыз.
2. Цилиндр күчәренә параллель итеп үткәрелгән кисем нигез әйләнәсеннән 120° лы дуга кисеп ала. Цилиндр нигезенең радиусы R га, ә кисем диагонале белән цилиндр күчәре арасындагы почмак 30° ка тигез. Цилиндрның күләмен табыгыз.

М—15

1. Авыш призманың нигезендә төзек өчпочмак ята. Ян кырларның берсе — диагональләре 6 һәм 8 гә тигез булган ромб. Ян кабыргалар нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Призманың күләмен табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедында ян кабырга 10 га тигез. AA_1 кабыргасы белән BB_1 һәм DD_1 кабыргаларына кадәр ераклык тиңдәшле рәвештә 5 кә һәм 12 гә, ә AA_1 һәм CC_1 кабыргалары арасы 13 кә тигез. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

М—16

1. Өчпочмаклы төзек пирамиданың нигез биеклеге h ка тигез, ә ян кабыргалары нигезгә α почмагы ясап авышкан. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. $MABCD$ пирамидасының нигезендә ягы a га һәм кысынкы A почмагы α га тигез булган ромб ята. MB ян кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр, ә MAD һәм MDC кырлары нигезгә β почмагы ясап авышкан. Пирамиданың күләмен табыгыз.

М—17

1. Конус түбәсе аша, нигез яссылыгы белән 60° лы почмак ясап, нигезне 60° лы дуганы тартып тора торган хорда буенча кисеп үтүче яссылык үткәрелгән. Конусның биеклеге $4\sqrt{3}$ кә тигез. Конусның күләмен табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек пирамидага конус камалган. Конус һәм пирамиданың күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

М—18

1. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамидада нигезләрнең яклары $6\sqrt{2}$ һәм $4\sqrt{2}$ гә тигез. Диагональ кисеменең мәйданы 90 га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. Кисек конуста нигезләрнең радиуслары 1 : 3 чагыштырмасында. Конусның төзүчесе 4 кә тигез һәм нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзи. Конусның күләмен табыгыз.

М—19

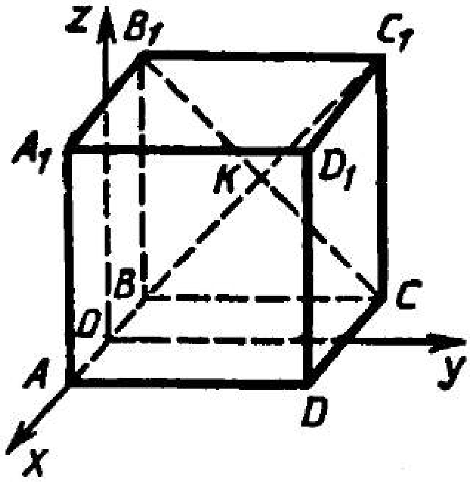
1. Ярымшарның өслек мәйданы 48π гә тигез. Аның күләмен табыгыз.
2. Күчәр кисемендә төзек өчпочмак булган конуска шар камалган. Аларның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

ӨМ

1. $M(2; -1; 3)$ ноктасы аша үтә торган һәм $2x - 3y + z - 4 = 0$ яссылыгына параллель булган яссылыкның тигезләмәсен языгыз.
2. $2x + y - z + 1 = 0$ һәм $x - 2y + 3z - 2 = 0$ яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.

ВАРИАНТ 2

М—1



Рәс. 2

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубы турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырылган (рәс. 2.), C $(-2;\ 4;\ 0)$.

   1) Кубның барлык башка түбәләренең координаталарын табыгыз.

   2) $\vec{OC}$, $\vec{OB_1}$ һәм $\vec{OK}$ векторларының координаталарын табыгыз һәм аларны $\vec{i}$, $\vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.

2. $\vec{a}\{-1;\ 3;\ -2\}$, $\vec{b}\{2;\ -1;\ 3\}$, $\vec{p}\{-3;\ -1;\ -4\}$ векторлары бирелгән. $\vec{a}+2\vec{b}$ һәм $\vec{p}$ векторлары коллинеар булырмы?

М—2

1. $\vec{m}\{-2;\ 1;\ -1\}$ һәм $\vec{n}\{1;\ 3;\ 2\}$ векторлары бирелгән. $|2\vec{m}-\vec{n}|$ һәм $|2\vec{m}|-|\vec{n}|$ ны табыгыз.
2. $ABCD$ параллелограммында диагональләр O ноктасында кисешә, $A\ (1;\ 3;\ -1)$, $B\ (-2;\ 1;\ 0)$, $O\ (0;\ 1{,}5;\ 0)$.
   1) C һәм D түбәләренең координаталарын табыгыз.
   2) BC ягының озынлыгын табыгыз.
   3) $\vec{AD}$ векторын $\vec{i}$, $\vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.

М—3

1. $MABCD$ дүртпочмаклы төзек пирамидасында барлык кабыргалар да a га тигез. Исәпләгез:
   1) $\vec{MA}\cdot\vec{AC}$;
   2) $\vec{MA}\cdot\vec{DB}$.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында K ноктасы — AA_1B_1B кырының үзәге. A_1C һәм KD векторлары арасындагы почмак кысынкымы, турымы, әллә җәенкеме?

М—4

1. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 120^\circ$. $\vec{a} - \vec{b}$ һәм $\vec{a} + 2\vec{b}$ векторлары арасындагы почмакны табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының нигезендә $ABCD$ ромбы ята, $\angle A_1AD = \angle A_1AB$. Векторларны кулланып, $BD \perp AA_1$ икәнен исбатлагыз.

М—5

1. а) Oz күчәренә карата үзәк симметрия;

   б) $\vec{p}\,\{0{,}09;\ 0{,}08;\ 1\}$ векторына параллель күчерү вакытында, $B\,(0{,}01;\ 0{,}02;\ -1)$ ноктасы күчкән ноктaларның координаталарын табыгыз.
2. Хәрәкәт вакытында почмакның үзенә тигез булган почмакка чагылдырылуын исбатлагыз.

М—6

1. Турыга перпендикуляр булган яссылыкның хәрәкәт вакытында бу турыга перпендикуляр яссылыкка чагылдырылуын исбатлагыз.
2. 1 нче мәсьәләдәге исбатлаудан чыгып, үзара параллель ике яссылыкның берсе ниндидер турыга перпендикуляр булса, икенчесенең дә шушы ук турыга перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

М—7

1. Цилиндрның төзүчесе аша ике кисем үткәрелгән, аларның берсе — күчәр кисеме. Кечерәк кисемнең мәйданы Q га тигез. Кисем яссылыклары арасындагы почмак 60° ка тигез. Күчәр кисеменең мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек призманы цилиндр камаган. Әгәр призманың биеклеге 4 кә, ә призма нигезенең биеклеге 6 га тигез булса, цилиндрның өслек мәйданын табыгыз.

М—8

1. Конусның түбәсе аша нигезне m озынлыгындагы хорда буенча кисеп үтүче яссылык үткәрелгән. Кисем төзүчеләре арасындагы почмак — туры, ә конус төзүчеләре арасындагы иң зур почмак $120°$ ка тигез. Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. Кисек конусның ян өслеге 208π гә, төзүчесе 13 кә, биеклеге 5 кә тигез булса, нигез радиусларын табыгыз.

М—9

1. Нигезе $4\sqrt{3}$, ә түбә янындагы почмагы $120°$ булган тигезьянлы өчпочмак нигезе буйлап үтүче туры тирәсендә әйләнә. Әйләнү җисеменең өслек мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек пирамиданы конус камаган. Әгәр пирамида нигезенең ягы a га тигез, ә ян кабыргалары нигезгә $30°$ лы почмак ясап авышкан булса, конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—10

1. Сфера үзәгенең координаталары (0; 0; 4). Сфера $(2\sqrt{2}; 0; 5)$ ноктасы аша үтә.
   1) Сфераның тигезләмәсен языгыз.
   2) Координаталары (3; 1; 5) һәм $(0; \sqrt{5}; 6)$ булган нокталар сфера өстендә ятамы?
2. Квадратның барлык яклары да сферага орына. Квадратның диагонале $10\sqrt{2}$ гә тигез. Әгәр сфера үзәгеннән квадрат яссылыгына кадәр ара 12 гә тигез булса, сфера радиусын табыгыз.

М—11

1. Шар үзәгенә кадәр ераклыгы 12 булган яссылыкның шар белән кисем мәйданы 25π гә тигез. Шар өслегенең мәйданын табыгыз.
2. Сфераны яссылык кисеп үтә. Сфераның кисешү сызыгы нокталарының берсе аша үткәрелгән диаметры $4\sqrt{2}$ гә тигез, һәм ул яссылык белән $45°$ лы почмак төзи. Кисешү сызыгының озынлыгын табыгыз.

М—12

1. Өчпочмаклы төзек призмада нигез ягы 4 кә тигез, ә ян кырлары нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Бу пирамида эченә камалган сфераның радиусын табыгыз.
2. Турыпочмаклы төзек призмада нигезнең ягы 2 гә, ә ян кабыргасы $2\sqrt{2}$ гә тигез. Призманы камап торучы сфераның өслеген табыгыз.

М—13

1. Турыпочмаклы параллелепипедның нигез яклары һәм диагонале 1 : 2 : 3 чагыштырмасында. Ян кабыргасының озынлыгы 4 кә тигез. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. Туры призманың нигезендә тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмак ята. Зуррак ян кырының диагонале 12 гә тигез һәм нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Призманың күләмен табыгыз.

М—14

1. $ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә ABC өчпочмагы ята, биредә $AB = BC = 10$, $\angle ABC = 30°$. AA_1 кабыргасы аша, CC_1B_1B кырына перпендикуляр итеп, яссылык үткәрелгән. Кисемнең диагонале нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Призманың күләмен табыгыз.
2. Цилиндрның күчәренә параллель яссылык күчәрдән 15 ераклыгында урнашкан. Барлыкка килгән кисемнең диагонале 20 гә, цилиндрның нигез радиусы 17 гә тигез. Цилиндрның күләмен табыгыз.

М—15

1. Авыш параллелепипедның нигезендә диагональләренең берсе 6 га тигез булган ромб ята. Бер ян кырының диагонале $5\sqrt{3}$ кә тигез һәм нигез яссылыгына перпендикуляр. Ян кабыргалар нигез яссылыгына 60° лы почмак ясап авышкан. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасында ян кабырга 10 га, AA_1 кабыргасыннан CC_1 һәм BB_1 кабыргаларына кадәр ераклык 13 кә, ә AA_1 дән капма-каршы ян кырга кадәр ераклык 5 кә тигез. Призманың күләмен табыгыз.

М—16

1. Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигез диагонале d га тигез. Ян кырлар нигезгә α почмагы ясап авышкан. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. $DABC$ пирамидасының нигезендә тигезьянлы ABC өчпочмагы ята, биредә $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$. BD кабыргасы нигез яссылыгына перпендикуляр, ADC кыры аның белән β почмагы төзи. Пирамиданың күләмен табыгыз.

М—17

1. Конусның түбәсе аша үткәрелгән яссылык нигез әйләнәсен озынлыгы $6\sqrt{3}$ кә тигез булган һәм $120°$ лы дуганы тартып торган хорда буенча кисә. Яссылык нигез яссылыгы белән $45°$ лы почмак төзи. Конусның күләмен табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек пирамиданы конус камый. Конус һәм пирамиданың күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

М—18

1. Өчпочмаклы төзек кисек пирамида нигезләренең яклары $8\sqrt{3}$ кә һәм $4\sqrt{3}$ кә тигез. Пирамиданың кабыргасы һәм нигезнең капма-каршы ягының уртасы аша үткәрелгән кисемнең мәйданы 54 кә тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. Кисек конусның биеклеге 5 кә, ә күчәр кисемнең диагонале 13 кә тигез. Нигезләрнең радиуслары 1 : 2 чагыштырмасында. Конусның күләмен табыгыз.

М—19

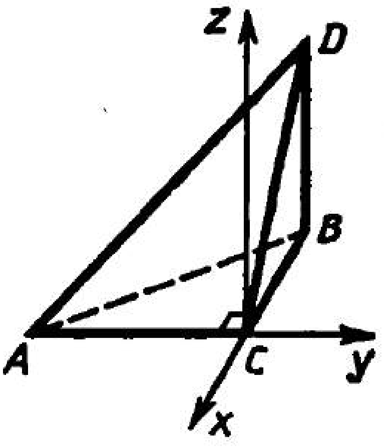
1. Шарның күләме $\frac{32\pi}{3}$ гә тигез. Ярымшарның өслек мәйданын табыгыз.
2. Кучәр киселе төзек өчпочмак булган конусны шар камап тора. Аларның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

ӨМ

1. A (2; m; −1) һәм B (1; 2; m) нокталары һәм $2x - 3y + z - 1 = 0$ яссылыгы бирелгән. m ның кыйммәте нинди булганда, бу яссылык AB турысына параллель булыр?
2. Әгәр A (−1; 2; 1) һәм B (2; −1; −2) булса, AB турысы һәм $2x - 2y + z - 3 = 0$ яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

ВАРИАНТ 3

М—1



Рәс. 3

1. $DABC$ тетраэдры турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырылган (рәс. 3), $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$, $AB = 10$, $DB \perp ABC$, ADC яссылыгы ABC яссылыгы белән 60° лы почмак төзи.

   1) Тетраэдр түбәләренең координаталарын табыгыз.

   2) M — ADB өчпочмагында медианаларның кисешү ноктасы. $\vec{CM}$ векторының координаталарын табыгыз. Бу векторны $\vec{i}$, $\vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.

2. Пространствода дүрт нокта — A, B, C һәм O нокталары бирелгән. $\vec{OA}$ {1; −1; 2}, $\vec{OB}$ {3; −2; 4} һәм $\vec{OC}$ {5; −3; 6}. A, B һәм C нокталары бер туры өстендә ятамы?

М—2

1. ABC тигезьянлы өчпочмагы бирелгән ($AC = CB$), A (1; −2; 1), B (3; 2; −3). C түбәсе ординаталар күчәрендә ята. ABC өчпочмагының мәйданын табыгыз.
2. $\vec{a}$ векторы $\vec{b}$ {−2; 2; 1} векторы белән бер юнәлештә. Әгәр $|\vec{a}| = 12$ булса, $\vec{a}$ векторының координаталарын табыгыз.

М—3

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедында барлык кабыргалар да a га тигез, $\angle BAD = 60°$. Исәпләгез:

   1) $\vec{C_1D} \cdot \vec{AC}$;

   2) $\vec{B_1D} \cdot \vec{AC}$.

2. A (1; 1; 5), B (4; 7; 5), C (8; 5; 5), D (5; −1; 5) нокталары $ABCD$ турыпочмаклыгының түбәләре булып тора. Турыпочмаклыкның диагональләре арасындагы зуррак почмакны табыгыз.

М—4

1. $BACD$ тетраэдрында $\angle BDC = \angle BDA = \angle DCA = 90°$, $BC = 3$, $AC = 4$. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$ суммасын табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы туры призмасының нигезендә тигезьянлы ABC өчпочмагы ята, $AC = CB = a$, $\angle ACB = 120°$, $AA_1 = a$, E һәм F — CA һәм BB_1 кабыргаларының урталары. Исәпләгез:
   1) EF озынлыгын;
   2) EF һәм AA_1 турылары арасындагы почмакны.

М—5

1. а) A (1; 2; 3) һәм B (−1; −2; −3) нокталарының координаталар башлангычына карата симметрияле икәнен исбатлагыз.
   б) B (3; −4; 5) һәм C (3; 4; 5) нокталарының Oxz яссылыгына карата симметрияле икәнен исбатлагыз.
2. Хәрәкәт вакытында икекырлы почмакның шул ук зурлыктагы икекырлы почмакка чагылдырылуын исбатлагыз.

М—6

1. Дүртпочмаклы төзек пирамида биеклеге яткан турының бу пирамиданың симметрия күчәре булуын исбатлагыз.
2. 1 нче мәсьәләдәге исбатлаудан чыгып, дүртпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге аша үтүче теләсә нинди кисеменең тигезьянлы өчпочмак булуын исбатлагыз.

М—7

1. Цилиндрның ян өслеге җәелмәсенең диагонале җәелмә нигезенең ягы белән φ почмагы төзи. Цилиндрның күчәр кисеме диагонале белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы 10 га тигез, ян кырлары нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Бу пирамида эченә, бер нигезе пирамида нигезе яссылыгында ятарлык, ә өске нигезенең әйләнәсе пирамиданың ян өслегенә орынырлык итеп, цилиндр камалган. Әгәр цилиндрның нигез радиусы 2 гә тигез булса, аның ян өслегенең мәйданын табыгыз.

М—8

1. Конусның ян өслеге җәелмәсендә үзәк почмак 120° ка тигез. Ян өслегенең мәйданы 12π. Конусның күчәр кисеме мәйданын табыгыз.
2. Кисек конусның төзүчесе L га тигез һәм нигез яссылыгы белән α почмагы төзи. Конусның күчәр кисеме диагонале төзүчесенә перпендикуляр. Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—9

1. $ABCD$ турыпочмаклы трапециясендә (BC һәм AD — нигезләр) $\angle BAD = 90^\circ$, $BC = AB = a$, $AD = 2a$. Бу трапецияне аның AD нигезе яткан туры тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан җисемнең өслек мәйданын табыгыз.
2. $DABC$ пирамидасы нигезендә ABC тигезьянлы өчпочмагы ята, биредә $AC = AB = a$, $\angle BAC = \alpha$. Пирамиданы конус камап тора. Әгәр $\angle DAC = \beta$ булса, конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—10

1. Әгәр сфераның радиусы 2 гә тигез булып, үзәге Oxz яссылыгында ятса һәм сфераның координаталар башлангычы һәм A (1; 1; 0) ноктасы аша үтүе билгеле булса, аның тигезләмәсен төзегез.
2. Ромбның ягы a га, кысынкы почмагы α га тигез. Ромбның барлык яклары да зур түгәрәк мәйданы $\frac{\pi a^2}{8}$ булган шарга орына. Шар үзәгеннән ромб яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

М—11

1. Шар үзәгенең төрле якларында ятучы ике параллель яссылык шарны 144π һәм 25π мәйданлы кисемнәр буйлап кисә. Параллель яссылыклар арасындагы ераклык 17 гә тигез булса, шар өслегенең мәйданын табыгыз.
2. Сфера өслегендә ятмаган нокта аша сферага ике орынма яссылык үткәрелгән. Әгәр яссылыклар арасындагы почмак 60°, сфераның мәйданы 32π булса, сфера үзәгеннән яссылыкларның кисешү сызыгына кадәр ераклыкны табыгыз.

М—12

1. Пирамида нигезендә бер ягы a га, ә аңа каршы ятучы почмагы 30° ка тигез булган өчпочмак ята. Пирамиданың ян кабыргалары 5 кә тигез. Пирамиданы камаучы шар үзәгеннән нигез яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. Туры параллелепипедның нигезендә кысынкы почмагы α га тигез булган ромб ята. Параллелепипед эченә шар камалган. Параллелепипедның зур диагонале белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

М—13

1. Турыпочмаклы параллелепипед нигезендә квадрат ята. Параллелепипедның диагонале d га тигез һәм ян кыры белән 30° лы почмак төзи. Аның күләмен табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә турыпочмаклы өчпочмак ABC ята ($\angle C=90°$), $AC = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\angle AB_1C = 30°$. Призманың күләмен табыгыз.

М—14

1. Туры параллелепипедның нигезендә диагональләре 6 һәм 8 гә тигез булган ромб ята. Өске һәм аскы нигезләрнең капма-каршы яклары аша үтә торган кисем яссылыгы нигез белән 60° лы почмак төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. Конус нигезенең радиусы 4 кә, а аның биеклеге 10 га тигез Бу конус эченә өске нигезе конусның ян өслегенә орына һәм аскысы конус нигезендә ята торган цилиндр камалган. Цилиндрның күчәр яссылыгы — квадрат. Цилиндрның күләмен табыгыз.

М—15

1. $ABCA_1B_1C_1$ авыш призмасының нигезендә төзек ABC өчпочмагы ята, $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60^\circ$. Нигезнең ягы a га, ян кабыргасы b га тигез. Призманың күләмен табыгыз.
2. Авыш параллелепипедның ян кабыргасы нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Параллелепипедның биеклеге $5\sqrt{3}$ кә тигез. Ике чиктәш ян кырларның мәйданы 40 һәм 60 ка тигез. Алар арасындагы почмак 45°. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

М—16

1. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге h ка, ә түбә янындагы яссы почмагы α га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. Пирамида нигезендә яклары $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ һәм 4 булган өчпочмак ята. Ян кабыргалар нигезгә 45° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың күләмен табыгыз.

М—17

1. Конусның ян өслеге җәелмәсендәге почмак 120° ка тигез. Конусның ян өслеге мәйданы 3π гә тигез. Конусның күләмен табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек пирамида эченә конус камалган. Пирамида нигезенең ягы $10\sqrt{3}$ кә тигез. Пирамида биеклегенең уртасыннан ян кырына кадәр ераклык $\frac{30}{13}$. Конусның күләмен табыгыз.

М—18

1. Өчпочмаклы төзек кисек пирамиданың нигез яклары a һәм b га $(a > b)$, ян кабыргасы $a - b$ га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. ABC тигезьянлы өчпочмагында $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Өчпочмак C түбәсе аша AC га перпендикуляр үтә торган күчәр тирәсендә әйләнә. Әйләнү җисеменең мәйданын табыгыз.

М—19

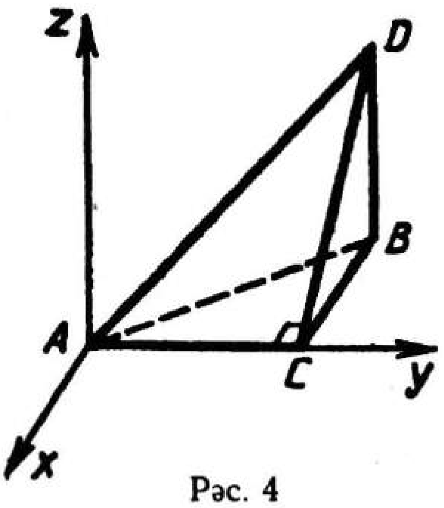
1. Радиусы 5 кә тигез булган шар яссылыкка орына. Орыну ноктасы аша, орынма яссылыкка $\arccos\frac{3}{5}$ почмагы белән, шарны кисеп үтүче яссылык үткәрелгән. Шарның бу яссылык кисеп алган кечерәк өлешенең күләмен табыгыз.
2. Конусның төзүчесе 10 га, ә ян өслеге мәйданы 60π гә тигез. Конус эченә камалган шарның күләмен табыгыз.

ӨМ

1. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=1$ сферасы белән чикләнгән шар һәм $2x-y+2z-1=0$ яссылыгы бирелгән. Бу яссылык шарны кисеп үтәме? Әгәр кисеп үтсә, кисем мәйданын табыгыз.
2. $A\ (1;\ 0;\ -2)$ һәм $B\ (0;\ 3;\ 1)$ нокталары аша O күчәренә параллель итеп үткәрелгән яссылыкның тигезләмәсен төзегез.

ВАРИАНТ 4

М—1



Рәс. 4

1. $DABC$ тетраэдры турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырылган (рәс. 4), $\angle ACD = 90°$, $AB = 8$, $\angle BAC = 60°$, $DB \perp ABC$,
ADC яссылыгы ABC яссылыгы белән $60°$ лы почмак төзи.
1) Тетраэдр түбәләренең координаталарын табыгыз.
2) $\overrightarrow{AK}$ векторының координаталарын табыгыз, биредә K — DBC кырының медианалары кисешү ноктасы. Бу векторны $\vec{i}$, $\vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.
2. Пространствода A, B һәм C нокталары бирелгән, биредә $\overrightarrow{AB}\{2; 3; -1\}$ һәм $\overrightarrow{AC}\{-4; m, n\}$. m һәм n ның кыйммәтләре нинди булганда, бу нокталар бер туры өстендә ятыр?

М—2

1. ABC өчпочмагында $BC = AC\sqrt{3}$; $A\ (1; -1; 1)$, $B\ (-1; -1; 3)$. C түбәсе Oz ның тискәре ярымкүчәрендә ята. CM медианасының озынлыгын табыгыз.
2. $\vec{m}$ векторы $\vec{p}\ \{-1; 2; 1\}$ векторына капма-каршы юнәлгән. Әгәр $|\vec{m}| = 3\sqrt{6}$ булса, $\vec{m}$ векторының координатасын табыгыз.

М—3

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек призмасында барлык кабыргалар да a га тигез, P — A_1B_1 нең уртасы. Исәпләгез:
1) $\overrightarrow{C_1P} \cdot \overrightarrow{B_1C}$;
2) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PC_1}$.
2. $A\ (14; -8; -1)$, $B\ (7; 3; -1)$, $C\ (-6; 4; -1)$, $D\ (1; -7; -1)$ нокталары $ABCD$ ромбының түбәләре булып тора. Ромбның кысынкы почмагын табыгыз.

М—4

1. $PHKM$ пирамидасында PM — биеклек, $\angle PKH = 90°$. Әгәр $MK = 6$, $KH = 8$ булса, $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{KH}$ суммасын табыгыз.
2. $MABC$ тетраэдрында $MC \perp ACB$, $\angle ACB = 135°$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = MC = a$, E һәм F — CA һәм BM кабыргаларының урталары.
   1) EF ның озынлыгын;
   2) EF һәм CM турылары арасындагы почмакны табыгыз.

М—5

1. а) $\vec{p}$ векторына параллель күчерү вакытында A (1; 2; 3) ноктасы B (4; 5; 6) ноктасына күчсен, ди. $\vec{p}$ ның координаталарын табыгыз.
   б) A (5; 6; 7) һәм B (−5; 6; −7) нокталарының Oy күчәренә карата симметрияле икәнен исбатлагыз.
2. Үзара φ почмагы ясаучы туры белән яссылыкның хәрәкәт вакытында шундый ук φ почмагы ясый торган туры белән яссылыкка чагылдырылуын исбатлагыз.

М—6

1. Турыпочмаклы параллелепипедта капма-каршы кырларның диагональләре кисешкән нокталар буйлап узучы турының — параллелепипедның симметрия күчәре булуын исбатлагыз.
2. 1 нче мәсьәләдә исбатланганнан чыгып, турыпочмаклы параллелепипедның капма-каршы кырлар диагональләре кисешкән нокталарын эченә алган яссылык белән теләсе нинди кисеме — турыпочмаклык икәнен исбатлагыз.

М—7

1. Цилиндрның күчәр кисеме диагональләре белән аның нигез яссылыгы арасындагы почмак α га тигез. Цилиндрның ян өслек җәелмәсе диагонале белән җәелмәнең нигез ягы арасындагы почмакны табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек призма эченә цилиндр камалган. Цилиндрның аскы нигезе пирамиданың нигез яссылыгында ята, ә өске нигезенең әйләнәсе пирамиданың ян өслегенә орына. Әгәр пирамида ягы $8\sqrt{3}$ кә, ә цилиндрның биеклеге 2 гә тигез булса, цилиндрның ян өслеге мәйданын табыгыз. Пирамиданың ян кырлары нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзиләр.

М—8

1. Конусның ян өслеге җәелмәсендә үзәк почмак 240° ка тигез. Конусның биеклеге $5\sqrt{5}$. Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. Кисек конусның төзүчесе аскы нигез яссылыгы белән φ почмагы төзи. Аның күчәр кисеме диагонале конусның төзүчесенә перпендикуляр. Нигез әйләнәләренең озынлыклары суммасы $2\pi m$ га тигез. Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—9

1. Ромбның диагональләре 6 һәм 8 гә тигез. Бу ромб аның якларының берсен эченә алган туры тирәсендә әйләнә. Килеп чыккан җисемнең өслек мәйданын табыгыз.
2. Пирамиданың нигезендә ян ягы a га, ә нигез янындагы почмагы α га тигез булган тигезьянлы өчпочмак ята. Ян кырлары нигезгә φ почмагы ясап авышкан. Пирамида эченә камалган конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—10

1. Әгәр сфера үзәгенең Oz күчәрендә ятуы һәм сфераның $K\ (-2; -2; 1)$ ноктасы аша үтүе билгеле булса, радиусы 3 кә тигез булган әлеге сфераның тигезләмәсен төзегез.
2. A, B һәм C нокталары шар өслегендә ята. AB һәм BC хордалары a га, ә алар арасындагы почмак α га тигез. Әгәр шарның зур түгәрәге мәйданы $\frac{\pi a^2}{2}$ гә тигез булса, ABC яссылыгы шар үзәгеннән нинди ераклыкта ята?

М—11

1. Сфераны ике параллель яссылык 10π һәм 24π озынлыктагы кисемнәр буйлап кисеп үтә. Әгәр яссылыклар арасындагы ераклык 7 гә тигез һәм кисемнәрнең үзәкләре бер радиус өстендә ятса, сфераның мәйданын табыгыз.
2. Шар өслегендәге бер нокта аша шарны кисеп үтүче ике яссылык үткәрелгән. Ике яссылык та шар үзәгеннән $2\sqrt{3}$ ераклыгында, һәм алар арасындагы почмак 60° ка тигез. Килеп чыккан кисемнәрнең мәйданнарын табыгыз.

М—12

1. Пирамиданың нигезендә катетлары 3 кә һәм 4 кә тигез булган турыпочмаклы өчпочмак ята. Пирамиданың түбәсе нигезнең һәр ягыннан 3 ераклыгында тора. Пирамида эченә камалган шарның радиусын табыгыз.
2. Туры призманың нигезендә ягы 5 кә тигез булган өчпочмак ята. Бу якка каршы ятучы почмак 150° ка тигез. Призманың биеклеге 24 кә тигез. Призманы камап торучы шарның мәйданын табыгыз.

М—13

1. Турыпочмаклы параллелепипедның нигезе булып, ягы a га тигез булган квадрат тора. Параллелепипедның диагонале ян кыры белән 30° лы почмак төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә ABC турыпочмаклы өчпочмагы ята ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 5$. AB_1C яссылыгы нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. B түбәсеннән бу яссылыкка кадәр ераклык $2\sqrt{2}$ гә тигез. Призманың күләмен табыгыз.

М—14

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедның нигезе булып $ABCD$ параллелограммы тора, $BD = 6$, $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle BDA = 30^\circ$. Нигезләрнең ике зуррак кабыргалары аша үтүче кисем яссылыгы нигез белән 30° лы почмак төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек призма нигезенең ягы 8 гә, ә призманың биеклеге 16 га тигез. Пирамида эченә, өске нигезенең әйләнәсе пирамиданың ян өслегенә орына, ә аскы нигезе пирамида нигезендә ята торган итеп, цилиндр камалган. Цилиндрның күчәр кисеме — квадрат. Цилиндрның күләмен табыгыз.

М—15

1. Авыш параллелепипедның нигезе булып, яклары a һәм b га тигез турыпочмаклы өчпочмак тора. Озынлыгы c га тигез булган ян кабыргасы нигезнең янәшә ятучы яклары белән $60°$ лы почмак төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. Өчпочмаклы авыш призмада биеклек $10\sqrt{2}$ гә тигез, ә ян кабыргалар нигез яссылыгы белән $45°$ лы почмак төзи. Ике кырның мәйданнары 100 һәм 200 гә, ә алар арасындагы почмак $120°$ ка тигез. Призманың күләмен табыгыз.

М—16

1. Өчпочмаклы төзек пирамиданың биеклеге h ка, ә пирамида түбәсе янындагы яссы почмак α га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. Пирамида нигезендә бер почмагы $30°$ ка тигез булган тигезьянлы трапеция ята. Ян кырлары нигезгә $60°$ лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың биеклеге $3\sqrt{3}$ кә тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

М—17

1. Конусның ян өслеге җәелмәсендә хорда озынлыгы һәм радиус $6\sqrt{3}$ кә һәм 6 га тигез. Конусның күләмен табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек пирамида эченә конус камалган. Пирамида нигезенең ягы $6\sqrt{3}$ кә тигез. Нигез түбәсеннән капма-каршы ян кырга кадәр ераклык $\sqrt{56}$ га тигез. Конусның күләмен табыгыз.

М—18

1. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамидада нигез яклары m һәм $2m$ га, пирамиданың апофемасы $\frac{m\sqrt{3}}{2}$ гә тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. ABC тигезьянлы өчпочмагында $AB = CB = 25$, $AB = 48$. Өчпочмак B түбәсе һәм AB га перпендикуляр итеп үткәрелгән күчәр тирәсендә әйләнә. Әйләнү җисеменең күләмен табыгыз.

М—19

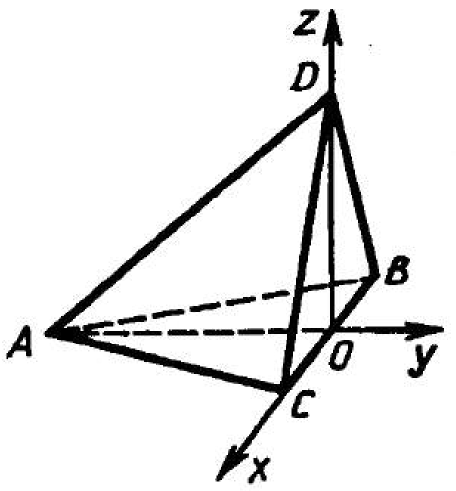
1. Шар сегменты һәм конус икесе бергә шар секторын төзи. Сегментның биеклеге 1 гә, конус күләме 12π гә тигез. Шар секторының күләмен табыгыз.
2. Конусның күләме 128π гә, ә биеклеге 6 га тигез. Конусны камап торучы шарның күләмен табыгыз.

ӨМ

1. $x - 2y + 2z - 9 = 0$ яссылыгының $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 36$ сферасына орынма булуын исбатлагыз.
2. $E(-1; 2; 0)$ һәм $F(1; 0; -2)$ нокталары аша Ox күчәренә параллель үткәрелгән яссылыкның тигезләмәсен языгыз.

ВАРИАНТ 5

М—1



Рәс. 5

1. $DABC$ тетраэдры турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырылган (рәс. 5), $AB = AC = 25$, $BC = 30$, $BO = OC$. ADC кыры нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи.

   1) Тетраэдр түбәләренең координаталарын табыгыз.

   2) $\vec{OK}$ векторының координаталарын табыгыз, биредә K — O ноктасыннан ACD кырына төшерелгән перпендикулярның нигезе. $\vec{OK}$ векторын $\vec{i}$, $\vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.

2. $\vec{m}$ ның нинди кыйммәтләре өчен $\vec{a}\ \{2;\ -1;\ 3\}$, $\vec{b}\ \{1;\ 3;\ -2\}$ һәм $\vec{c}\ \{m;\ 2;\ 1\}$ векторлары компланар булыр?

М—2

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүрпочмаклы төзек призмасында нигезнең ягы 2 гә, ян кабырга 4 кә тигез, E — CD ның уртасы һәм K — C_1C ның уртасы; DK D_1C ны P ноктасында кисеп үтә. B_1E кисемтәсенең уртасы M белән P ноктасы арасындагы ераклыкны табыгыз.
2. AB турысы $A\ (-1;\ 2;\ 1)$ һәм $B\ (2;\ 1;\ -1)$ нокталары белән бирелгән. Әгәр $AM = 3\sqrt{14}$ булса, бу туры өстендә ятучы M ноктасының координаталарын табыгыз.

М—3

1. $\vec{a}$ векторы $\vec{i}$, һәм $\vec{k}$ векторлары белән 120° һәм 135° лы почмаклар ясый. $\vec{a}$ һәм $\vec{j}$ векторлары арасындагы почмакны табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында M ноктасы—AA_1B_1B кырының үзәге, K — AD ның уртасы. Әгәр кубның кабыргасы 1 гә тигез булса, MC_1K өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—4

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы туры призмасының нигезендә тигезьянлы ABC өчпочмагы ята, $BD \perp AC$, $BD = AD = 4$, $BB_1 = 2$. B_1C диагоналенең уртасы аша бу ян кырга перпендикуляр итеп яссылык үткәрелгән. AB_1 турысы белән бу яссылык арасындагы почмакны табыгыз.
2. $ABCD$ тетраэдрында $BD = BC = BA$, $\angle ABD = \angle ABC = 60°$, $\angle CBD = 90°$. Векторларны кулланып, DAC һәм DBC яссылыкларының перпендикуляр икәнен исбатлагыз.

М—5

1. a турысы Ox һәм Oy координаталар күчәрләре арасындагы почмакның биссектрисасын эченә ала. a турысына карата күчәр симметриясе вакытында A (10; 20; 0) ноктасы күчкән A_1 ноктасының координаталарын табыгыз.
2. Пространствоны, координаталары $(x; y; z)$ булган теләсә нинди ноктаны $(2x; 2y; 2z)$ ноктасына күчерә торган үз-үзенә чагылдыру — хәрәкәт буламы?

М—6

1. Төзек тетраэдрда капма-каршы кабыргаларның урталарын эченә алган турының бу тетраэдрның симметрия күчәре икәнлеген исбатлагыз.
2. 1 нче мәсьәләдә исбатланганнан чыгып, төзек тетраэдрда капма-каршы кабыргаларның урталары аша үтүче һәрбер яссылыкның бу тетраэдрны ике тигез кисәккә бүлүен исбатлагыз.

М—7

1. Биеклеге a булган цилиндрга бер ягы a га тигез, ә икенчесе цилиндрның нигез яссылыгы белән 60° лы почмак ясый торган турыпочмаклык камалган. Турыпочмаклык түбәләренең цилиндр нигезләренең әйләнәләрендә ятуы билгеле булса, цилиндрның күчәр киселеше мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек призманың барлык кабыргалары да a га тигез, радиусы a булган цилиндрик өслекләрнең күчәрләре — призманың ян кабыргалары була. Әлеге цилиндрик өслекләр һәм призма нигезләренең яссылыклары белән чикләнгән җисемнең ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—8

1. Конусның ян өслеге җәелмәсендә үзәк почмак 270° ка тигез. Конус түбәсе аша иң зур мәйданлы кисем үткәрелгән. Кисем һәм нигез яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
2. Конус биеклегенең уртасы аша нигезгә параллель яссылык үткәрелгән. Конус бүленүдән килеп чыккан өлешләрнең тулы өслекләре 3 : 11 чагыштырмасында. Конусның төзүчесе һәм нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

М—9

1. Тигезьянлы өчпочмакның ян ягы a га, түбә янындагы почмагы 120° ка тигез. Өчпочмак, нигез янындагы почмак биссектрисасына параллель итеп, түбә аша үткәрелгән туры тирәсендә әйләнә. Әйләнү җисеменең өслек мәйданын табыгыз.
2. Бишпочмаклы төзек пирамидада ян кабыргалар нигез яссылыгына φ почмагы ясап авышкан. Пирамида эченә камалган конусның төзүчесе m га тигез. Конусның кучәр киселе мәйданын табыгыз.

М—10

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ сферасы һәм аның өстендә ятучы $A(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ z)$ ноктасы бирелгән. A һәм $B(-\sqrt{2};\ 2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ нокталары аша туры үткәрелгән. Бу туры белән сфера кисешкән нокталарның координаталарын табыгыз.
2. Яссылык A (3; 0; 0), B (0; 4; 0) һәм C (0; 0; 1) нокталары аша үтә. Бу яссылык $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{49}{169}$ сферасын кисәме? Әгәр киссә, кисешү сызыгының озынлыгын табыгыз.

М—11

1. Шарның үзара перпендикуляр ике кисеменең озынлыгы 12 булган уртак хордалары бар. Бу кисемнәрнең мәйданнары 100π һәм 64π булса, шарның радиусын табыгыз.
2. Кучәр киселе турыпочмаклы өчпочмак булган конусның һәм R радиуслы ярымшарның нигезләре уртак. Ярымшар нигезенә параллель итеп яссылык үткәрелгән. Бу яссылык белән ярымшар һәм конус кисешкәндә барлыкка килгән боҗраның мәйданы иң зур булырлык итеп үткәрелгән яссылыктан ярымшар үзәгенә кадәр ераклыкны табыгыз.

М—12

1. R радиуслы шар эченә нигезендә квадрат яткан пирамида камалган. Ян кабыргаларның берсе нигез яссылыгына перпендикуляр, ә иң зур ян кабырга нигез белән 30° лы почмак төзи. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. Шарны нигезләрнең яклары a һәм b булган өчпочмаклы төзек кисек пирамида камаган. Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—13

1. Турыпочмаклы параллелепипед нигезенең яклары 6 га һәм 8 гә тигез. Нигезнең диагонале аша, параллелепипед диагоналенә параллель итеп, яссылык үткәрелгән. Бу яссылык нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә турыпочмаклы ABC өчпочмагы ята ($\angle C = 90°$), $AC = BC = a$. Ян кырының диагонале B_1C AA_1B_1B кыры яссылыгы белән α почмагы төзи. Призманың күләмен табыгыз.

М—14

1. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыпочмаклы төзек призмасында B_1F һәм B_1E диагональләре 24 кә һәм 25 кә тигез. Призманың күләмен табыгыз.
2. Цилиндр күчәренә параллель кисем нигез әйләнәсеннән 120° лы дуга кисеп ала. Цилиндрның бу яссылык белән бүленгән өлешләренең күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

М—15

1. Авыш призманың нигезендә төзек өчпочмак ята. Призманың барлык кабыргалары да үзара тигез. Ян кабыргаларның берсе нигезнең янәшә ятучы яклары белән 45° лы почмак төзи. Призманың ян өслеге мәйданы $4(1 + \sqrt{2})$ га тигез. Призманың күләмен табыгыз.
2. Өчпочмаклы авыш призмада ян кабыргадан каршы ятучы ян кыр диагоналенә кадәр ераклык 5 кә, ә бу кырның мәйданы 40 ка тигез. Призманың күләмен табыгыз.

М—16

1. $MABC$ пирамидасының нигезендә ABC турыпочмаклы өчпочмагы ята, $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$. AMB кыры нигез яссылыгына перпендикуляр, ә калган ике ягы нигезгә B почмагы ясап авышканнар. Биеклек нигезеннән BMC кырына кадәр ераклык d га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек пирамидада нигезнең ягы a га, ә ике чиктәш ян кыр арасындагы почмак α га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

М—17

1. Ике конусның нигезләре параллель һәм һәркайсының түбәсе икенчесе нигезенең үзәгендә ята. Әгәр бер конусның төзүчесе a га тигез һәм биеклеге белән β почмагы төзесә, ә икенчесенең төзүчеләре арасындагы иң зур почмак α га тигез булса, конусларның уртак өлешләренең күләмен табыгыз.
2. Пирамида нигезендә тигезьянлы трапеция ята, трапециянең нигезләре 10 һәм 20 гә, ә ян ягы 10 га тигез. Пирамиданы камаучы конусның күләме $\frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$ кә тигез. Ян кабыргаларның нигез яссылыгына авышу почмагын табыгыз.

М—18

1. Өчпочмаклы кисек пирамиданың нигезләре булып, яклары 4 һәм 12 гә тигез булган төзек өчпочмаклар тора. Бер ян кыры нигез яссылыгына перпендикуляр, ә калган икесе нигез белән 60° лы почмак төзи. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. $ABCD$ параллелограммы аның A түбәсе аша кечерәк BD диагоналенә параллель итеп үткәрелгән туры тирәсендә әйләнә. Әгәр параллелограммның $\angle A = 60°$, зуррак ягы 6 га тигез, ә кечерәк диагонале ягына перпендикуляр булса, әйләнү җисеменең күләмен табыгыз.

М—19

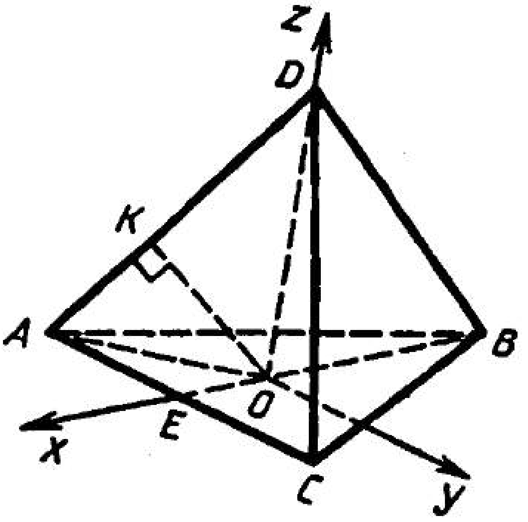
1. Өслек радиуслары 13 һәм 20, үзәкләре арасындагы ераклык 21 гә тигез булса, ике ягы да кабарынкы пыяланың күләмен табыгыз.
2. Конусның күләме аның эченә камалган шарның күләменнән $2\frac{1}{4}$ тапкыр зуррак. Конусның төзүчесе белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

ӨМ

1. $x + y - z - 2 = 0$ яссылыгы һәм $A\ (1;\ 1;\ 1)$ ноктасы бирелгән. Бирелгән A ноктасының бирелгән яссылыкка карата симметрияле A_1 ноктасы координаталарын табыгыз.
2. α яссылыгы $M\ (1;\ 1;\ -2)$ ноктасы аша үтә һәм xOy яссылыгын $y - x = 1$ турысы буйлап кисә. Бу яссылыкның тигезләмәсен языгыз.

ВАРИАНТ 6

М—1



Рәс. 6

1. $DABC$ өчпочмаклы төзек пирамидасы турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырылган (рәс. 6). Нигезнең ягы 2 гә тигез, ян кыры нигезгә $60°$ лы почмак ясап авышкан.

1) Пирамида түбәләренең координаталарын табыгыз.

2) $\overrightarrow{OK}$ векторының координаталарын табыгыз, биредә $OK \perp AD$. Бу векторны $\vec{i}$, $\vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.

2. y ның нинди кыйммәтләре өчен $\vec{m}\{2; -1; 3\}$, $\vec{n}\{3; 4; -2\}$ һәм $\vec{p}\{10; y; 2\}$ векторлары компланар булыр?

М—2

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы туры призмасында $\angle ABC = 90°$, $AB = 6$, $BC = 8$, $BB_1 = 8$. A түбәсе һәм B_1B кабыргасының уртасы P аша BC га параллель яссылык үткәрелгән. Нигезне камаучы әйләнә үзәге K дан кисемдәге медианалар кисешү ноктасы M га кадәр араны табыгыз.

2. EF ноктасы $E(-1; 2; 2)$ һәм $F(2; 1; 3)$ нокталары белән бирелгән. P ноктасы EF нурына капма-каршы нур өстендә ята, $EP = 5\sqrt{11}$. P ноктасына координаталарын табыгыз.

М—3

1. $\vec{m}$ векторы $\vec{i}$ һәм $\vec{j}$ векторлары белән $60°$ лы почмаклар төзи. Бу векторның $\vec{k}$ векторы белән нинди почмак төзүен табыгыз.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында E ноктасы — AA_1 нең уртасы, ә F — DD_1C_1C кырының үзәге. Кубның кабыргасы 1 гә тигез булса, EB_1F өчпочмагының мәйданын табыгыз.

М—4

1. $DABC$ пирамидасының нигезендә турыпочмаклы ABC өчпочмагы ята ($\angle C = 90°$), $BD \perp ABC$, $AC = CB = 1$, $BD = 2$. DC кабыргасының уртасы аша, аңа перпендикуляр итеп, яссылык үткәрелгән. Бу яссылык белән AD кабыргасы арасындагы почмакны табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклы параллелепипедында $AB = 2$, $BC = AA_1 = 1$. BD_1 диагоналенең A_1C_1D яссылыгына перпендикуляр булмавын исбатлагыз.

М—5

1. α яссылыгы Ox күчәрен, шулай ук Oz һәм Oy күчәрләре арасындагы почмакның биссектрисасын эченә ала. α яссылыгына карата көзгечә симметрия вакытында B (0; 20; 10) ноктасы күчкән ноктаның координаталарын табыгыз.
2. Координаталары (x; y; z) булган теләсә нинди ноктаның ($x - 5$; $y + 3$; $z - 7$) ноктасына күчә торган пространствоның үзенә чагылдырылуы хәрәкәт буламы?

М—6

1. Параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасы аның симметрия үзәге булуын исбатлагыз.
2. 1 нче мәсьәләдә исбатланганнан чыгып, параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасы аша үткәрелгән һәр яссылыкның параллелепипедны тигез өлешләргә бүлүен исбатлагыз.

М—7

1. Турыпочмаклыкның түбәләре цилиндр нигезләре әйләнәләрендә ята. Турыпочмаклыкның яклары 1 : 2 чагыштырмасында, кечерәк яклар нигез ясслыкларында ята. Цилиндрның биеклеге 5 кә, ә нигез радиусы $2\sqrt{5}$ кә тигез. Турыпочмаклык яссылыгы цилиндр күчәрен кисеп үтә. Турыпочмаклыкның мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек призманың барлык кабыргалары a га тигез. Ян кабыргалары исә $\frac{a}{2}$ радиуслы цилиндрик өслекләрнең күчәрләре булып тора. Күрсәтелгән цилиндрик өслекләр һәм призма нигезләренең яссылыклары белән чикләнгән җисемнең призма эчендә яткан өлешенең ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—8

1. Конусның ян өслеге җәелмәсендәге үзәк почмак 200° ка тигез. Конусның түбәсе аша иң зур мәйданлы кисем үткәрелгән. Кисем һәм нигез яссылыклары арасындагы почмакны табыгыз.
2. Кисек конус нигезләренең радиуслары 1 : 2 чагыштырмасында. Конус биеклегенең уртасы аша, нигезләргә параллель итеп, конусны тулы өслекләре 23 : 39 чагыштырмасындагы ике өлешкә бүлә торган яссылык үткәрелгән. Конус төзүчесенең нигез яссылыгына авышлык почмагын табыгыз.

М—9

1. Параллелограммның периметры P га, ә диагонале d га тигез. Параллелограмм үзенең түбәсе аша бу диагональгә перпендикуляр итеп үткәрелгән күчәр тирәсендә әйләнә. Әйләнү җисеменең өслек мәйданын табыгыз.
2. Бишпочмаклы төзек пирамидада ян кырның нигез яссылыгына авышу почмагы φ га, пирамиданы камаучы конусның төзүчесе L га тигез. Конусның күчәр кисеменең мәйданын табыгыз.

М—10

1. Туры A (1; 2; −1) һәм B (3; 0; 2) нокталары белән бирелгән. AB турысының

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\frac{17}{4}$$

сферасы белән кисешү нокталарының координаталарын табыгыз.
2. Яссылык A (2; 0; 0), B (0; 0; 3) һәм C (0; 1; 0) нокталары аша үтә. $x^2+(y-\frac{2}{3})^2+z^2=R^2$ сферасы белән ABC яссылыгының R га бәйле рәвештә, бер-беренә карата урнашуын ачыклагыз.

М—11

1. Шарның зур түгәрәге мәйданы 50π гә тигез. Аның үзара перпендикуляр ике киселе өчен озынлыгы 6 булган уртак хорда бар. Бу кисемнәрнең берсенең мәйданы 25π булса, шар үзәгеннән кисем яссылыкларына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. Ярымшар нигезгә параллель яссылык белән киселгән. Барлыкка килгән кисем — аскы нигезе ярымшар нигезенең яссылыгында яткан цилиндрның өске нигезе булып тора. Цилиндрның ян өслеге мәйданы иң зур булырлык итеп, кисем яссылыгыннан ярымшар үзәгенә кадәр араны табыгыз.

М—12

1. Өчпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы a га тигез. Пирамидага камалган шар өслеге пирамиданың биеклеген урталай бүлә. Пирамиданың ян кабыргасын табыгыз.
2. R радиуслы шар эченә алтыпочмаклы төзек призма камалган. Призма түбәсенә үткәрелгән радиус ян кыр яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—13

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ турыпочмаклы параллелепипедында $AB = 6$, $BC = \frac{12}{\sqrt{5}}$. Нигез диагонале һәм B_1 түбәсе аша, B түбәсеннән 2,4 ераклыкта итеп, яссылык үткәрелгән. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә турыпочмаклы ABC өчпочмагы ята ($\angle C = 90°$), $\angle ABC = \beta$. Ян кырының B_1C диагонале аша, AA_1B_1B кырына перпендикуляр һәм нигез яссылыгы белән α почмагы төзерлек итеп, яссылык үткәрелгән. Призманың биеклеге h ка тигез. Призманың күләмен табыгыз.

М—14

1. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыпочмаклы төзек призмасында $C_1E = 3$, $\angle FC_1E = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. Призманың күләмен табыгыз.
2. Цилиндр күчәренә параллель кисем нигез әйләнәсеннән 60° лы дуга кисеп ала. Цилиндрның бу яссылык белән бүленүдән килеп чыккан өлешләренең күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

М—15

1. $ABCA_1B_1C_1$ авыш призмасның нигезе булып турыпочмаклы ABC өчпочмагы тора ($\angle C = 90°$). AA_1C_1C кырының яссылыгы нигез яссылыгына перпендикуляр. Призманың ян кабыргасы нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан һәм нигезнең катетларына тигез. Призманың ян өслеге мәйданы $2(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 2)$ гә тигез. Призманың күләмен табыгыз.
2. Өчпочмаклы авыш призмада ян кабырга һәм нигезнең бу кабырга белән чалышма ягы арасындагы почмак 45° ка тигез. Бу якның озынлыгы 6 га, ә ян кабыргадан бу якны эченә алган ян кырга кадәр ераклык 4 кә тигез. Ян кабырганың озынлыгы 5 кә тигез. Призманың күләмен табыгыз.

М—16

1. $DABC$ пирамидасының нигезендә тигезьянлы ABC өчпочмагы ята, $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$. ADC кыры нигез яссылыгына перпендикуляр, ә калган ике кыр нигезгә β почмагы ясап авышкан. Биеклек нигезеннән BDC ян кырына кадәр ераклык d га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек пирамидада нигезнең ягы a га , ә чиктәш ян кырлар арасындагы почмак α га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

М—17

1. Ике конусның нигезләре параллель, ә һәрберсенең түбәсе икенчесе нигезенең үзәгендә урнашкан. Әгәр конус нигезләренең радиуслары 4 кә һәм 6 га, ә уртак биеклекләре 15 кә тигез булса, бу конусларның уртак өлешләренең күләмен табыгыз.
2. Пирамиданың нигезендә яткан турыпочмаклы трапециянең нигезләре 2 гә һәм 4 кә тигез. Пирамида эченә камалган конусның күләме $\frac{64\pi}{81}$ гә тигез. Ян кырларның нигез яссылыгына авышу почмагын табыгыз.

М—18

1. Кисек пирамиданың нигезләрендә ромблар ята. Аскы нигезнең диагональләре 12 һәм 16 га, ә өскесенең —8 һәм 6 га тигез. Ромбларның җәенке почмак яклары аша уза торган ике ян кыры нигез яссылыгына перпендикуляр, ә калган икесе нигез белән 45° лы почмак төзи. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. Ромбның җәенке почмак түбәсеннән аның якларына төшерелгән перпендикулярларның нигезләре арасындагы ераклык 20 гә тигез. Ромбны 60° лы кысынкы почмагы түбәсе аша зур диагоналенә перпендикуляр итеп үткәрелгән күчәр тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан җисемнең күләмен табыгыз.

М—19

1. Өслек радиуслары 25 һәм 29 га, ә үзәкләре арасындагы ераклык 6 га тигез булган кабарынкы-батынкы линзаның күләмен табыгыз.
2. Конус күләменең аның эченә камалган шар күләменә чагыштырмасы 8 : 3 кә тигез. Конусның күчәр киселеше түбәсендәге почмакны табыгыз.

ӨМ

1. $E(1; -2; 1)$ һәм $F(2; -1; 3)$ булган EF турысы һәм $x - 2y + z - 3 = 0$ яссылыгы бирелгән. Бу туры белән яссылык кисешкән P ноктасының координаталарын табыгыз.
2. $A(1; -1; 1)$ һәм $B(2; 1; -1)$ нокталары аша үтүче һәм $x - 2y + z - 1 = 0$ яссылыгына перпендикуляр яссылыкның тигезләмәсен языгыз.

ВАРИАНТ 7

М—1

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы туры призмасындагы F, M һәм K нокталары — AA_1, A_1B_1 һәм BC кабыргаларының урталары, ә E ноктасы B_1C_1 кабыргасын, B_1 түбәсеннән башлап, 1 : 5 чагыштырмасында бүлә, $\angle ABC = 90^\circ$. Призманың ян кабыргалары һәм нигезнең катетлары үзара тигез. Координаталар методын кулланып, F, M, E һәм K нокталарының бер яссылык өстендә яту-ятмауларын ачыклагыз.
2. Компланар булмаган өч вектор — $\vec{p}\ \{1;\ -2;\ 1\}$, $\vec{q}\ \{2;\ 0;\ -1\}$ һәм $\vec{m}\ \{-1;\ 1;\ 2\}$ бирелгән. $\vec{a}\ \{1;\ 2;\ -2\}$ векторын $\vec{p}$, $\vec{q}$ һәм $\vec{m}$ векторлары буенча таркатыгыз.

М—2

1. $DABC$ тетраэдрында $DB \perp ABC$, $DB = 4$, $AB = BC$, $BE \perp AC$, $BE = AC = 4$. P ноктасы тетраэдрның барлык түбәләреннән дә бер үк ераклыкта урнашкан. P ноктасыннан тетраэдр түбәләренә кадәр ераклыкларны табыгыз.
2. Тигезләмәне чишегез:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2} = 1.$$

М—3

1. Турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырылган $MABCD$ пирамидасының нигезендә $ABCD$ ромбы ята. $A\ (-3;\ 10;\ -5)$, $C\ (3;\ 4;\ 1)$, $M\ (5;\ 8;\ -3)$, $\angle MAD = \angle MAB$. Пирамиданың биеклеген табыгыз.
2. Векторларның скаляр тапкырчыгышын кулланып,

$$\sqrt{\sin^2 x + 0{,}5} + \sqrt{\cos^2 x - 0{,}5} + \sqrt{0{,}5}$$

аңлатмасының иң зур кыйммәтен табыгыз. Бу очракта xның кыйммәте нинди булыр?

М—4

1. $MABC$ пирамидасының нигезендә турыпочмаклы ABC өчпочмагы ята ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 3$, $BC = 5$. AM кабыргасы нигезнең AC ягына перпендикуляр, $AM = 4$, $MB = \sqrt{30}$. Пирамиданың биеклеген табыгыз.
2. $DABC$ тетраэдрында ADB, ADC һәм BDC почмаклары — җәенке почмаклар, $AD = BD = CD$. ABC өчпочмагының кысынкыпочмаклы икәнен исбатлагыз.

М—5

1. m_1 һәм m_2 — кисешүче перпендикуляр турылар булсын. Бу турыларга карата симметрияләр композициясенең бу турыларга перпендикуляр турыга карата симметрия икәнен исбатлагыз.
2. Координаталары $(x;\ y;\ z)$ булган теләсә нинди нокта $(-x + 2;\ -y - 3;\ -z + 1)$ ноктасына күчә торган пространство чагылдыруы хәрәкәт була аламы? Булса, мондый ноктаны нинди юл белән табарга мөмкин?

М—6

1. Пространствоның S_p һәм S_q күчәр симметрияләре бирелгән, p һәм q — тәңгәл булмаган симметрия күчәрләре. $S_q \circ S_p$ һәм $S_p \circ S_q$ — бу симметрияләрнең композицияләре. $S_q \circ S_p = S_p \circ S_q$ булганда, p һәм q ның кисешүче турылар булуын исбатлагыз.
2. Бирелгән l турысында, α яссылыгында ятучы ноктага карата, бирелгән A ноктасына симметрияле ноктаны табыгыз (l турысы α яссылыгын M ноктасында кисә).

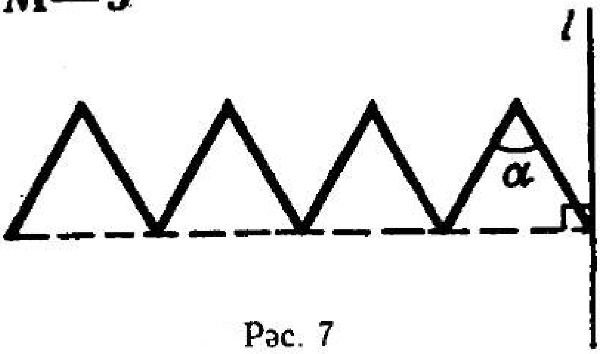
М—7

1. $ABCD$ һәм $EFKL$ — цилиндрның үзара перпендикуляр булган күчәр кисемнәре, AD һәм EL — бер үк нигезнең диаметрлары, M — AB төзүчесенең уртасы, $ML \perp AC$. Күчәр кисеменең мәйданы 4 кә тигез. Цилиндрның өслек мәйданын табыгыз.
2. $MABCD$ дүртпочмаклы төзек пирамидасында нигезнең ягы a га тигез, ә ян кырлары нигез яссылыгына $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ почмагы ясап авышкан. Бу пирамида эченә тигезьянлы цилиндр (күчәр кисеме — квадрат) камалган, аның бер төзүчесе нигез яссылыгында ята, ә нигез әйләнәләре AMB һәм DMC кырларының апофемаларына орыналар. Цилиндрның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—8

1. A (1; 2; −2), B (4; 2; −2), C (3; 4; −2) нокталары биеклеге 3 кә тигез булган конусның нигез әйләнәсендә яталар. Конусны $z = 0$ яссылыгы кисеп уза. Бу яссылык белән конусның кисем мәйданын, конус түбәсенең координаталарын һәм конусның ян ислеге мәйданын табыгыз.
2. Кисек конусның күчәр киселе диагональләре үзара перпендикуляр. Кисек конусның ян өслеге мәйданы, төзүчесе — кисемнең диагонале, ә нигез радиусы—кисемнең биеклеге булган конусның ян өслеге мәйданы белән 6 : 3 чагыштырмасында. Төзүченең нигез яссылыгына авышу почмагын табыгыз.

М—9



Рәс. 7

1. 7 нче рәсемдә 8 буынлы сынык сызык бирелгән, аның барлык буыннары да a га, ә буыннары арасындагы почмак α га тигез. Бу сынык сызыкны l күчәре тирәсендә әйләндерү нәтиҗәсендә килеп чыккан өслекнең мәйданын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек призманың барлык кабыргалары да a га тигез. Призманың дүрт түбәсе конусның нигез яссылыгында, ә калган икесе конусның ян өслегендә ята. Конусның төзүчесе нигез яссылыгы белән φ почмагы төзи. Конусның күчәр киселе мәйданын һәм аның мөмкин табылган иң кечкенә кыйммәтен табыгыз. Бу кыйммәт φ почмагы нинди булганда мөмкин?

М—10

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - z = 0$ һәм $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = 0$ сфералары кисешәләр. Бу сфераларның кисешү сызыгы озынлыгын табыгыз.
2. A (2; 0; 0) ноктасына кадәр B (−4; 0; 0) ноктасына караганда ике тапкыр якынрак урнашкан нокталар күплеген табыгыз.

М—11

1. Шар өслегендәге ноктадан, бер-берсенә α почмагы ясап, өч тигез хорда үткәрелгән. Әгәр шарның радиусы R га тигез булса, хордаларның озынлыгын табыгыз.
2. Сфераның бер ноктасыннан, озынлыклары a, b, c га тигез итеп, пар-пар перпендикуляр өч хорда үткәрелгән. Сфераның мәйданын табыгыз.

М—12

1. Дүртпочмаклы пирамиданың барлык кабыргалары да a га тигез. Пирамиданың биеклеге шар диаметры булып тора. Бу җисемнәрнең кисешү сызыгы озынлыгын табыгыз.
2. Кабыргасы a га тигез булган куб эченә шар камалган. Куб түбәсе янындагы өчкырлы почмакларның берсенә, беренче шарга орынырлык итеп, икенче шар камалган. Икенче шарның радиусын табыгыз.

М—13

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипеды нигезенең AB һәм BC яклары 6 га һәм 8 гә тигез. AD һәм CD як-якларының урталары һәм B_1 түбәсе аша, нигез яссылыгы белән $45°$ лы почмак төзи торган яссылык үткәрелгән. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә ABC турыпочмаклы өчпочмагы ята ($\angle C = 90°$), $BC = 4$, $BB_1 = 3$. Ян кырларның AC_1 һәм CB_1 диагональләре арасындагы почмак $\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}$ га тигез. Призманың күләмен табыгыз.

М—14

1. Куб тирәсенә, кубның барлык түбәләре дә призманың нигезләре якларының урталары булырлык итеп, призма камаганнар. Призманың нигезендә нигез яклары a һәм b га тигез булган трапеция ята. Призманың күләмен табыгыз.
2. Ярымцилиндр формасындагы тагарак кырыйларына кадәр сыеклык белән тулган. Цилиндрның төзүчеләре горизонталь калырлык итеп тагаракны $30°$ ка авыштырганда, сыеклыкның ничә проценты агып чыгар?

М—15

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасының нигезендә ягы a га тигез булган ABC төзек өчпочмагы ята. Ян кабыргасы b га тигез, $\angle A_1AC = 60°$, $\angle A_1AB = 45°$. Призманың күләмен табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дүртпочмаклы авыш призмасының нигезендә яткан $ABCD$ дүртпочмагында $AC = 5$, $BD = 4$ һәм $AC \perp BD$. BB_1D_1D диагональ кисеме — турыпочмаклык, ә AA_1C_1C кисеменең мәйданы 30 га тигез. Призманың күләмен табыгыз.

М—16

1. $MABC$ өчпочмаклы пирамидасының нигезендә ягы $\sqrt{2}$ гә тигез булган төзек ABC өчпочмагы ята, $MA = \sqrt{2}$. Пирамиданың ян кырлары мәйданнары үзара тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. $DABC$ тетраэдрында $M \in AB$ һәм $AM = \frac{1}{3}AB$, P — ABC кырындагы AF медианасының уртасы, ә K — ADB кырындагы AL медианасының уртасы. M, K һәм P нокталары аша яссылык үткәрелгән. Бу яссылык пирамиданың күләмен нинди чагыштырмада бүлә?

М—17

1. Конусның түбәсе аша иң зур мәйданлы кисем үткәрелгән. Бу кисем яссылыгы нигез яссылыгы белән $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ гә тигез булган почмак төзи. Конусның төзүчесе L га тигез. Конусның бу яссылык белән кисеп алынган кечерәк өлешенең күләмен табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек пирамидада ян кабырганың озынлыгы 10 га, нигез ягының озынлыгы 12 гә тигез. Пирамиданың ян кырын, төзүчесендә пирамиданың ян кабыргасы яткан конусның нигез әйләнәсе камый. Конусның күләмен табыгыз.

М—18

1. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамида нигезләренең яклары a һәм b га $(a > b)$ тигез. Аскы һәм өске нигезләрнең капма-каршы яклары аша яссылык уздырылган. Бу яссылык пирамида күләмен нинди чагыштырмада бүлә?
2. ABC турыпочмаклы ($\angle C = 90°$) өчпочмагы A түбәсе аша A почмагы биссектрисасына перпендикуляр итеп үткәрелгән туры тирәсендә әйләнә, биредә $BC = a$ һәм $\angle A = 60°$. Әйләнү җисеменең күләмен табыгыз.

M—19

1. Пирамиданың нигезендә ягы 1 гә тигез булган төзек өчпочмак ята. Пирамида биеклегенең нигезе K бу өчпочмак үзәге O дан $2-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ераклыгында һәм OK нуры өчпочмак түбәләренең берсе аша уза. Әгәр пирамиданың биеклеге $\sqrt{\frac{4}{3}}$ булса, пирамида эченә камалган шарның өслек мәйданын табыгыз.

2. Радиусы 9 см, стенасының калынлыгы 3 см булган эче куыш шар суда йөзә, һәм су өстеннән аның 6 см биеклектәге өлеше калкып тора. Шар эшләнгән материалның тыгызлыгын табыгыз.

ӨМ

1. $MABCD$ дүртпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы 2 гә, пирамида биеклеге 1 гә тигез. Координаталар методын кулланып, AM белән DMC яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

2. $A(1; -1; 1)$ һәм $B(2; 0; -1)$ нокталары аша үтүче һәм $\vec{m}\{3; 1; -1\}$ векторы юнәлешенә параллель булган яссылыкның тигезләмәсен табыгыз.

ВАРИАНТ 8

М—1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында M, P, F һәм K нокталары — AD, AA_1, A_1B_1 һәм C_1C кабыргаларының урталары. Координаталар методын кулланып, M, P, F һәм K нокталарының бер яссылык өстендә яту-ятмауларын ачыклагыз.
2. $\vec{m}\{1; 1; 1\}$ векторын компланар булмаган $\vec{a}\{1; 1; -2\}$, $\vec{b}\{1; -1; 0\}$ һәм $\vec{c}\{0; 2; 3\}$ векторлары буенча таркатыгыз.

М—2

1. $DABC$ тетраэдрында $AD \perp ABC$, $AD = 2$, $\angle ACB = 90°$, $AC = CB = 4$. M ноктасы тетраэдрның барлык түбәләреннән дә бер үк ераклыкта ята. Бу ноктадан тетраэдр түбәләренә кадәр ераклыкларны табыгыз.
2. Пространстводагы координаталар системасында тигезләмәнең барлык чишелешләрен күрсәтегез:

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}.$$

М—3

1. Тигезьянлы ABC өчпочмагы турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырылган $DABC$ тетраэдрының нигезе булып хезмәт итә, $AB = AC$. ADC һәм ADB кырларының D түбәсеннән үткәрелгән биеклекләре үзара тигезләр. $A(1; 0; -2)$, $D(2; -1; 1)$, $K(0; 1; -1)$ — BC ның уртасы. Пирамиданың биеклеген табыгыз.
2. Векторларның скаляр тапкырчыгышларын кулланып, $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$ суммасының иң зур кыйммәтен табыгыз. Бу очракта x ның кыйммәте нинди булыр?

М—4

1. $DABC$ тетраэдрында $DB = DC = CB = AC = 3\sqrt{2}$, $AD = 3$, $\angle ABC = 90°$. Тетраэдрның D түбәсеннән төшерелгән биеклеген табыгыз.
2. $MEFKP$ пирамидасында M түбәсе янындагы яссы почмаклар α га тигез. EMK диагональ кисеменең түбә янындагы β почмагын исәпләгез.

М—5

1. Бер туры өстендә ятмаучы A, B, C нокталарына карата өч үзәк симметрия композициясенең $ABCD$ параллелограммының D түбәсенә карата үзәк симметрия булуын исбатлагыз.
2. (x; y; z) координаталы теләсә кайсы нокта ($x-1$; $-y-2$; $z+1$) ноктасына күчә торган пространствоның үз-үзенә чагылуы хәрәкәт булырмы? Әгәр булса, мондый нокта ничек табыла?

М—6

1. Икекырлы почмакның сызыкча почмагы биссектрисасының икекырлы почмакның симметрия күчәре булуын исбатлагыз.
2. Параллелепипед түбәләреннән кырларының өч диагонале үткәрелгән. Кабыргалары бу кисемтәләр өстендә ятарлык итеп параллелепипед төзелгән. Бирелгән параллелепипедның капма-каршы түбәсе төзелгән параллелепипедның симметрия үзәге икәнлеген исбатлагыз.

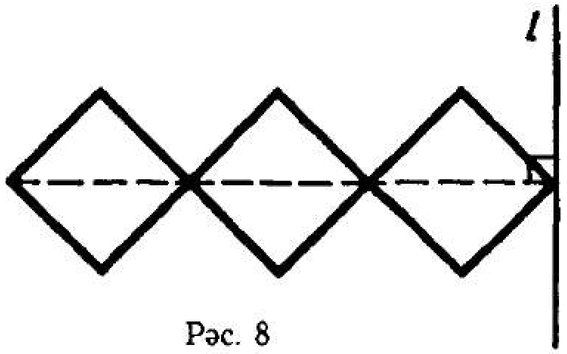
М—7

1. $ABCD$ һәм $EFKL$ — цилиндрның үзара перпендикуляр күчәр кисемнәре, AD һәм EL — бер нигезнең диаметрлары, M — FA ның уртасы, ә N — AL ның уртасы, $MN=\sqrt{17}$. Күчәр кисеменең мәйданы 16 га тигез. Цилиндрның өслек мәйданын табыгыз.
2. Дүртпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы a га тигез. Ян кабыргалар нигез яссылыгына 60° лы почмак ясап авышкан. Бу пирамида эченә, ян өслеге пирамида нигезенә, ә нигез әйләнәләре ян кырларга орынучы һәм цилиндрның төзүчесе нигез диагоналендә ятучы цилиндр камалган. Әгәр цилиндрның биеклеге h ка тигез булса, цилиндрның ян өслеге мәйданын табыгыз.

М—8

1. $A(1; -1; 2)$, $B(-2; -1; 2)$, $C(-2; 3; 2)$ нокталары конус нигезенең әйләнәсе өстендә яталар. $M\ (0; \frac{5}{3}; 6)$ ноктасы аның ян өслегендә ята. Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.
2. Кисек конусның төзүчесе 1 гә тигез, ә күчәр кисеме диагональләре үзара перпендикуляр. Конусның тулы өслеге мәйданы $\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}+1)$ гә тигез. Төзүченең нигез яссылыгына авышу почмагын табыгыз.

М—9



Рәс. 8

1. 8 нче рәсемдә яклары a га тигез булган өч квадрат сурәтләнгән. Бу фигураны l күчәре тирәсендә әйләндерү нәтиҗәсендә барлыкка килгән фигураның өслек мәйданын табыгыз.
2. Барлык кабыргалары үзара тигез булган өчпочмаклы төзек призма конус эченә камалган. Призманың өч түбәсе — конусның ян өслегендә, өчесе нигез яссылыгында ята. Конусның төзүчесе нигез яссылыгы белән φ почмагы төзи. Конусның күчәр киселеше мәйданын һәм аның иң кечкенә кыйммәтен табыгыз. Бу кыйммәт φ нинди булганда алына?

М—10

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ сферасы һәм үзәге $O_2(2; 4; 2)$ ноктасында булган сфера бирелгән. Алар озынлыгы $2\pi\sqrt{21}$ булган әйләнә буйлап кисешәләр. Икенче сфераның тигезләмәсен табыгыз.
2. $P(0; 4; 0)$ ноктасына караганда $M(0; 2; 0)$ ноктасына ике тапкыр якынрак урнашкан нокталар күплеген табыгыз.

М—11

1. R радиуслы дүрт шар һәрберсе калган өчесенә орынырлык итеп урнашканнар. Бу шарларга эчке яктан орынучы сфераның радиусын табыгыз.
2. Шар тетраэдрның барлык кабыргаларына орына. Тетраэдрның чалышма кабыргаларының озынлыклары суммаларын чагыштырыгыз.

М—12

1. Өчпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы a га тигез. Ян кырлар нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың биеклеге шар диаметры булып тора. Бу җисем өслекләренең кисешү сызыгы озынлыгын табыгыз.
2. Өчпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы a га, пирамида нигезе янындагы икекырлы почмак 60° ка тигез. Пирамида эченә өч шар камалган, аларның һәрберсе калган икесенә, нигез яссылыгына һәм пирамиданың ян кырларының берсенә орына. Шарларның нигезгә орыну нокталары нигезнең апофемаларында ятса, шарның радиусын табыгыз.

М—13

1. Турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $AB = 5$, $BC = 12$. Параллелепипедның B_1D диагонале аша нигез диагонале AC га параллель итеп, нигез яссылыгы белән 60° лы почмак ясый торган яссылык үткәрелгән. Параллелепипедның күләмен табыгыз.
2. $ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә турыпочмаклы ABC өчпочмагы ята ($\angle C = 90°$), $AC = 3$, $CB = 6$, M — ABC өчпочмагы медианаларының кисешү ноктасы, ә P — CC_1B_1B кырының симметрия үзәге. MP турысы AA_1C_1C кыры яссылыгы белән $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$ почмагы төзи. Призманың күләмен табыгыз.

М—14

1. Алтыпочмаклы төзек призманың ян кыры мәйданы Q га тигез. Ян кабыргасы аша призманың күләмен 1 : 3 чагыштырмасында бүлә торган кисем үткәрелгән. Кисем мәйданын табыгыз.
2. Квадрат формасындагы күчәр кисеме булган цилиндрның ике төзүчесе икенче цилиндрның нигезләрендә ята, ә нигез әйләнәләре икенче цилиндрның ян өслегенә орына. Бу ике цилиндрның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

М—15

1. $ABCA_1B_1C_1$ авыш призмасының нигезендә ABC өчпочмагы ята, биредә $AB = 50$, $AC = 40$ һәм $\angle BAC = 60°$, $AA_1 = 25$. A_1 түбәсеннән AC ягына кадәр ераклык 7 гә, ә AB ягына кадәр ераклык 20 гә тигез. Призманың күләмен табыгыз.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ авыш параллелепипедының нигезе булып ягы a га тигез булган квадрат тора. Ян кабыргалар шулай ук a га тигез, $\angle A_1AD = \angle A_1AB < \angle 90°$. AA_1 кабыргасының икекырлы почмагы 120° ка тигез. Параллелепипедның күләмен табыгыз.

М—16

1. $MABC$ пирамидасының нигезендә ягы $\sqrt{3}$ кә тигез булган төзек ABC өчпочмагы ята, $MA = 6$. Ян кырларының мәйданнары үзара тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
2. $MABC$ өчпочмаклы пирамидасында $MA = 4$, $MB = 6$, $MC = 5$. MA, MB һәм MC кабыргаларында, $MA_1 = 1$, $MB_1 = 3$ һәм $MC_1 = 2$ булырлык итеп, A_1, B_1 һәм C_1 нокталары алынган. $A_1B_1C_1$ яссылыгы пирамида күләмен нинди чагыштырмада бүлә?

М—17

1. Конус түбәсе аша иң зур мәйданлы кисем үткәрелгән. Бу кисемнең яссылыгы нигез яссылыгы белән arctg 2 гә тигез булган почмак төзи. Конусның биеклеге H ка тигез. Конусның бу яссылык белән кисеп алынган зуррак өлешенең күләмен табыгыз.
2. Пирамиданың нигезендә яклары 12 гә һәм 4 кә тигез булган турыпочмаклык ята. Пирамиданың ян кабыргалары 10 га тигез. Турыпочмаклыкның зуррак ягы аша үтә торган ян кыр конус нигезе әйләнәсе эченә камалган, ә конусның түбәсе капма-каршы ян кырның пирамида түбәсеннән үткәрелгән биеклеге өстендә ята. Конусның күләмен табыгыз.

М—18

1. Дүртпочмаклы төзек кисек пирамида нигезләренең яклары 1 : 2 чагыштырмасында. Аскы нигезнең үзәге һәм ян кырларның берсенең урта сызыгы аша яссылык үткәрелгән. Бу яссылык пирамиданың күләмен нинди чагыштырмада бүлә?
2. Тигезьянлы өчпочмакта түбә янындагы почмак 120° ка, ә нигезе a га тигез. Бу өчпочмак үзенең биеклекләре кисешкән нокта аша нигезенә параллель үткәрелгән күчәр тирәсендә әйләнә. Әйләнү җисеменең күләмен табыгыз.

М—19

1. Пирамиданың нигезендә ягы 1 гә тигез булган тигезьяклы өчпочмак ята. Пирамида биеклегенең нигезе K өчпочмак үзәге O дан $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ераклыгында ята, ә OK нуры өчпочмак якларының берсенең уртасы аша үтә. Әгәр пирамиданың биеклеге $\frac{2}{\sqrt{3}}$ булса, аның эченә камалган шарның өслек мәйданын табыгыз.
2. Тышкы радиусы R га тигез булган куыш металл шар яртылаш суга күмелеп йөзә. Материалның тыгызлыгы $\rho_ш$ га тигез. Шар стенасының калынлыгын табыгыз.

ӨМ

1. $MABCD$ пирамидасының нигезендә $ABCD$ турыпочмаклыгы ята, $AB = 2$, $AD = 1$. AMB кыры — нигез яссылыгына перпендикуляр булган яссылыкта ятучы тигезьянлы өчпочмак ($AM = BM$). Пирамиданың биеклеге $MO = 1$. Координаталар методын кулланып, AMD һәм DMC кырлары арасындагы почмакны табыгыз.
2. $M(1;\ 1;\ 1)$ ноктасы аша $2x - y + z - 1 = 0$ һәм $x + y - 2z - 2 = 0$ яссылыкларының кисешү сызыгына перпендикуляр итеп үткәрелгән яссылыкның тигезләмәсен языгыз.

КАБАТЛАУ ЭШЛӘРЕ

Кб—1

Вариант 1

DABC пирамидасының нигезендә ягы *a* га тигез булган төзек *ABC* өчпочмагы ята. *ADB* һәм *CDB* ян кырлары нигез яссылыгына перпендикуляр. Аларның уртак кабыргасы *a* га тигез.

1. Турыларның үзара торышлары нинди:

1) *AB* һәм *CD*; 2) *BD* һәм *AC*; 3) *PQ* һәм *AC*, биредә *P* һәм *Q* — *AB* һәм *CD* кабыргаларының урталары. Нигезләп аңлатыгыз.

2. Нигез үзәге аша *AC* һәм *BD* кабыргаларына параллель итеп үткәрелгән яссылык белән пирамиданың кисемен төзегез. Кисемнен төрен билгеләгез һәм аның мәйданын табыгыз.

3. Кырлар арасындагы почмакны табыгыз: 1) *ABD* һәм *CDB*; 2) *DAC* һәм *ABC*.

4. *BD* кабыргасы һәм *ADC* кыры арасындагы почмакның зурлыгын исәпләгез.

5. *AB* һәм *DC* арасындагы почмакны табыгыз.

6. *AB* һәм *DC* арасындагы ераклык нәрсәгә тигез?

Вариант 2

$ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә турыпочмаклы *ABC* өчпочмагы ята ($\angle C = 90°$), $AC = CB = a$. Ян кабыргалар шулай ук *a* га тигез.

1. Турыларның үзара торышы нинди:

1) AA_1 һәм *BC*; 2) A_1C_1 һәм *BC*; 3) *EF* һәм *AC*, биредә $E \in AB_1(AE : EB_1 = 1 : 2)$ һәм $F \in CB_1(CF : FB_1 = 2 : 1)$? Нигезләп аңлатыгыз.

2. *AC* һәм B_1C_1нең уртасы аша үтүче яссылык белән призманын кисемен төзегез. Кисемнең төрен билгеләгез һәм мәйданын табыгыз.

3. Почмакны табыгыз: 1) кисем һәм нигез яссылыклары арасындагы; 2) кисем яссылыгы һәм CC_1B_1B кыры яссылыгы арасындагы.

4. B_1C һәм AA_1B_1B кыры яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

5. *AB* һәм B_1C арасындагы почмакны табыгыз.

6. *AB* һәм B_1C арасындагы ераклыкны табыгыз.

Вариант 3

MABCD пирамидасының нигезендә ягы *a* га тигез булган квадрат ята. *AMB* кыры — төзек өчпочмак, һәм ул нигез яссылыгына перпендикуляр.

1. Турыларның үзара торышлары нинди:

1) *MB* һәм *AD*; 2) *AC* һәм *MD*; 3) *EF* һәм *PT*, биредә *E*, *F*, *T* һәм *P* — *MA*, *MC*, *CD* һәм *AD* кабыргаларының урталары. Нигезләп аңлатыгыз.

2. *AD* ягының уртасы аша *AMB* кырына параллель үтүче яссылык белән пирамиданың кисемен төзегез. Кисемнең төрен билгеләгез һәм мәйданын табыгыз.

3. Яссылыклар арасындагы почмак нәрсәгә тигез: 1) *ABC* һәм *DMC*; 2) *AMB* һәм *DMC*?

4. *MD* һәм *AMB* яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

5. *MD* һәм *AC* арасындагы почмакны табыгыз.

6. *BC* һәм *MD* арасындагы ераклыкны табыгыз.

Вариант 4

DABC тетраэдрында *ABC* һәм *DBC* кырлары — яклары *a* га тигез булган төзек өчпочмаклар. Бу кырларның яссылыклары үзара перпендикуляр.

1. Турыларның үзара торышы нинди:

1) *AC* һәм *DB*; 2) *AD* һәм *BC*; 3) *EF* һәм *BC*, биредә *E* һәм *F* — *AC* һәм *BD* кабыргаларының урталары. Нигезләп аңлатыгыз.

2. *A* түбәсе һәм *DC* кабыргасының уртасы *M* аша *BC* га параллель яссылык үткәрегез. Кисемнең төрен билгеләгез һәм мәйданын табыгыз.

3. Яссылыклар арасындагы почмакны табыгыз: 1) *ADC* һәм *ABC*; 2) *ADC* һәм *ADB*.

4. *ADC* кырының *A* түбәсеннән үткәрелгән медиана һәм *ABC* яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

5. Почмакны табыгыз: 1) *AD* һәм *BC* арасындагы; 2) *AB* һәм *DC* арасындагы.

6. *AD* һәм *BC* арасындагы ераклыкны табыгыз.

Кб—2

Вариант 1

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедының нигезендә диагональләре $AC = 8$ һәм $BD = 6$ булган ромб ята. *BD* диагонале һәм CC_1 кабыргасының уртасы аша нигез яссылыгы белән 45° лы почмак ясый торган яссылык үткәрелгән.

1) Бу яссылык параллелепипед күләмен нинди өлешләргә бүлә?

2) AB_1BDC_1C призмасының өслек мәйданын табыгыз.

3) A_1C диагонале һәм DD_1C_1C кыры яссылыгы арасындагы почмакны исәпләгез.

Вариант 2

Тигезьянлы турыпочмаклы ABC өчпочмагы ($\angle C = 90°$) $DABC$ пирамидасының нигезе булып тора, $AC = CB = 4$. Ян кабыргалар нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан.

1) CEF яссылыгы пирамида күләмен нинди өлешләргә бүлә, биредә F — BD ның уртасы, E ноктасы AB кабыргасында ята һәм $AE : EB = 1 : 3$?

2) Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

3) ADC һәм BDC кырлары белән төзелгән икекырлы почмакны табыгыз.

Вариант 3

$ABCA_1B_1C_1$ авыш призмасының нигезендә ягы $4\sqrt{3}$ кә тигез булган төзек өчпочмак ята. A_1 түбәсе BC ягының уртасына проекцияләнә, ян кабыргалар нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи.

1) Призманың ян өслеге мәйданын табыгыз.

2) Нигезнең BC ягы аша CC_1B_1B кырына перпендикуляр яссылык уздырылган. Ул призманың күләмен нинди чагыштырмада бүлә?

3) B түбәсеннән AA_1C_1C ян кырына кадәр ераклыкны табыгыз.

Вариант 4

$MABC$ пирамидасының нигезендә ABC тигезьянлы өчпочмагы ята, $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Пирамиданың биеклеге 4 кә тигез. Ян кырлар нигез яссылыгына бертигез авышкан.

1) A, O һәм E нокталары аша яссылык үткәрелгән, биредә E — MB ның уртасы, O — пирамида биеклеге MO ның нигезе. Бу яссылык пирамида биеклеген нинди чагыштырмада бүлә?

2) Пирамиданың өслек мәйданын табыгыз.

3) MB һәм AMC кыры яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

Кб—3

Вариант 1

Конусның төзүчеләре арасындагы иң зур почмак 120° ка тигез. Күчәр кисеменең мәйданы $16\sqrt{3}$.

1) Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

2) Конусның ян өслеге җәелмәсендәге үзәк почмакны табыгыз.

3) Бу конус эченә тагын бер конус камалган, аның нигезе бирелгән конус нигезенә параллель һәм аның биеклеге, бирелгән конусны, түбәдән башлап, 1 : 2 чагыштырмасында бүлә. Камалган ко-

нусның түбәсе бирелгән конусның нигез үзәге белән туры килә. Бу конусларның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

4) Бирелгән конусны камаучы шарның өслек мәйданын табыгыз.

Вариант 2

Биеклеге 8 гә тигез булган цилиндрда, аның төзүчеләре аша, араларындагы почмак 60° булырлык итеп, ике яссылык үткәрелгән. Кисем мәйданнары $32\sqrt{3}$ кә тигез.

1) Цилиндрның ян өслеге мәйданын табыгыз.

2) Цилиндрның ян өслеге җәелмәсендә диагональләр арасындагы кысынкы почмакны табыгыз.

3) Цилиндр эченә шар камарга мөмкинме, әгәр мөмкин булса, аларның күләмнәре чагыштырмасын табыгыз.

4) Бу цилиндрны камаучы шарның өслек мәйданын табыгыз.

Вариант 3

Кисек конус эченә диаметры $5\sqrt{3}$ булган шар камалган. Конусның төзүчеләре нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзиләр.

1) Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

2) Конусның күләмен табыгыз.

3) Конусның ян өслеге җәелмәсенең үлчәмнәрен күрсәтегез (җәелмәнең үзәк почмагы, концентрик әйләнәләрнең озынлыклары).

4) Конусны камаучы шарның өслек мәйданын табыгыз.

Вариант 4

Күчәр кисеме квадрат булган цилиндр конус эченә камалган. Цилиндрның өске нигез әйләнәсе конусның ян өслегенә орына, ә аскы нигезе конус нигезендә ята. Цилиндрның ян өслеге мәйданы 16π гә тигез, ә конусның төзүчесе нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи.

1) Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

2) Конус түбәсе аша уздырылган кисемнең мөмкин табылган иң зур кыйммәте нинди?

3) Бирелгән конустан цилиндрның өске нигезе белән кисеп алынган конус күләменең цилиндр күләменә чагыштырмасын табыгыз.

4) Конуска камаулы шарның күләмен табыгыз.

Кб—4

Вариант 1

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасында барлык кабыргалар да a га тигез, $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60^\circ$. Векторларны кулланып,

1) A_1C һәм нигез медианасы AK арасындагы почмакны табыгыз;

2) CC_1B_1B кырының турыпочмаклык икәнлеген исбатлагыз.

2. $ABCA_1B_1C_1$ призмасы түбәләренең координаталары белән бирелгән: $A(1; 2; 2)$, $B(-1; -1; 2)$, $C(3; -2; 2)$, $A_1(1; 2; 5)$. AE турысы һәм кыр диагонале B_1C га перпендикуляр булган яссылык арасындагы почмакны табыгыз, биредә E — A_1C_1 нең уртасы.

Вариант 2

1. $MABC$ тетраэдрының нигезендә ягы a га тигез булган төзек өчпочмак ята, $AM = 2a$, $\angle MAC = \angle MAB = 45°$. Векторларны кулланып,

1) $AM \perp CB$ икәнен исбатлагыз;

2) AC һәм BM кабыргаларының урталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

2. $MABCD$ пирамидасы түбәләренең координаталары белән бирелгән: $M(-1; 2; 5)$, $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 1; 2)$; $C(-1; 3; 2)$, $D(3; 1; 2)$. Пирамиданың күләмен табыгыз.

Вариант 3

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ туры параллелепипедының нигезендә ягы a га һәм A почмагы $60°$ ка тигез булган ромб ята. Ян кабыргалар шулай ук a га тигез. Векторларны кулланып,

1) AE һәм BD арасындагы почмакны табыгыз, биредә E — DD_1C_1C кырының симметрия үзәге;

2) $A_1C \perp BD$ икәнен исбатлагыз.

2. Координаталар методын кулланып, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында FE һәм A_1BD яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз, биредә F — DC ның уртасы, ә E — B_1C_1 нең уртасы.

Вариант 4

1. $DABC$ төзек тетраэдрында барлык кабыргалар да a га тигез, M — BDC кыры медианаларының кисешү ноктасы, E — AD кабыргасының уртасы. Векторларны кулланып,

1) EM ераклыгын табыгыз;

2) $PK \perp AD$ икәнен исбатлагыз, биредә P һәм K — DC һәм DB кабыргаларының урталары.

2. $MABCD$ пирамидасының нигезе булып $ABCD$ турыпочмаклыгы тора, биредә $AB = 2$ һәм $AD = 1$. AMB кыры — пирамида яссылыгына перпендикуляр яссылыкта ятучы тигезьянлы өчпочмак. Пирамиданың биеклеге 1 гә тигез. Координаталар методын кулланып, AF һәм DE арасындагы почмакны табыгыз, биредә F — MD ның уртасы, ә E — MC ның уртасы.

МД—1

Вариант 1

1. $M(1; 3; 2)$ ноктасы бирелгән. M ноктасының Oxz яссылыгына проекциясе булган M_1 ноктасының һәм M ноктасының Oz күчәренә проекциясе булган M_2 ноктасының координаталарын табыгыз.
2. $E(-1; 2; 3)$ һәм $F(1; -1; 4)$ нокталары бирелгән. EF векторын $\vec{i}, \vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.
3. $\vec{j}$ һәм $\vec{m} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ векторлары арасындагы почмакны табыгыз.
4. $A(1; 2; -4)$ һәм $C_1(3; 0; 2)$ нокталары — $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедының түбәләре. Аның диагональләре кисешкән ноктаның координаталарын табыгыз.
5. A, B, C нокталары бирелгән һәм $\overrightarrow{AB}\{-2; 4; 3\}$, $\overrightarrow{AC}\{4; -8; -6\}$ икәне билгеле. Бу нокталар бер туры өстендә ятамы?
6. $\vec{m}\{1; 2; 2\}$ векторы бирелгән. $\vec{m}$ векторы белән бер үк юнәлештәге $\vec{e}$ берәмлек векторының координаталарын табыгыз.
7. $\vec{a}$ векторы Ox күчәренең уңай юнәлеше белән $135°$ лы почмак төзи. Әгәр $|\vec{a}| = 2$ булса, $\vec{a}$ векторының абсциссасын табыгыз.
8. $DABC$ — төзек тетраэдр. Аңлатманы гадиләштерегез:

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

9. $\vec{a}$ һәм $\vec{в}$ векторлары бирелгән: $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{в}| = 2$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 120°$. $(\vec{a} + \vec{b})\,a$ ны табыгыз.
10. ABC өчпочмагында $A(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(1; -1; 1)$. Өчпочмакны камаучы әйләнә үзәгенең координаталарын табыгыз.

Вариант 2

1. $E(2; -1; 3)$ ноктасы бирелгән. E ноктасының Oyz яссылыгына проекциясе булган E_1 ноктасының һәм E ноктасының Oy күчәренә проекциясе булган E_2 ноктасының координаталарын табыгыз.
2. $K(2; -1; 3)$ һәм $M(1; -2; 1)$ нокталары бирелгән. $\overline{KM}$ векторын $\vec{i}$, $\vec{j}$ һәм $\vec{k}$ векторлары буенча таркатыгыз.
3. $\vec{j}$ һәм $\vec{n} = -2\vec{j} + \vec{k}$ векторлары арасындагы почмакны табыгыз.

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедында $B_1(-1;\ 3;\ 2)$ түбәсе һәм параллелепипед диагональләренең кисешү ноктасы $M(2;\ -1;\ 1)$ бирелгән. D түбәсенең координаталарын табыгыз.

5. E, F һәм K нокталары бирелгән, өстәвенә $\overrightarrow{EF}\ \{1;\ -2;\ 3\}$ һәм $\overrightarrow{EK}\ \{-2;\ 4;\ 6\}$ икәне билгеле. Бу нокталар бер туры өстендә ятамы?

6. $\vec{p}\ \{-2;\ -2;\ 1\}$ векторы бирелгән. $\vec{p}$ векторына капма-каршы юнәлгән $\vec{e}$ берәмлеге векторының координаталарын табыгыз.

7. $\vec{a}$ векторы Oy күчәренең уңай юнәлеше белән 135° лы почмак төзи. Әгәр $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ булса, a ноктасының ординатасын табыгыз.

8. $HPMKE$ пирамидасында барлык кабыргалар да үзара тигез. Аңлатманы гадиләштерегез:

$$(\overrightarrow{PH} - \overrightarrow{MK})(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{MK}) + \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE}).$$

9. $\vec{m}$ һәм $\vec{n}$ векторлары бирелгән: $|\vec{m}| = 2$; $|\vec{n}| = \sqrt{2}$, $\widehat{\vec{m}\,\vec{n}} = 135°$. $(\vec{m} - \vec{n})\vec{n}$ ны табыгыз.

10. MFP өчпочмагында $M(0;\ 0;\ 0)$, $F(2;\ -1;\ 3)$, $P(-1;\ 1;\ 1)$. Бу өчпочмакны камаучы әйләнәнең диаметрын табыгыз.

МД—2

Вариант 1

1. Цилиндр күчәренә параллель кисем бу күчәрдән 3 кә тигез ераклыкта уза. Әгәр цилиндр нигезенең радиусы 5 кә, цилиндрның биеклеге 10 га тигез булса, кисем мәйданын табыгыз.
2. Туры призманың нигезендә яклары 6, 8, 10 га тигез булган өчпочмак ята. Призманың биеклеге 4 кә тигез. Призманы камаучы цилиндрның ян өслеге мәйданы ... .
3. Конусның түбәсе аша, нигезне a озынлыгындагы хорда буенча кисеп үтүче яссылык үткәрелгән. Бу хорда 90° лы дуганы тартып тора. Кисемдәге төзүчеләр арасындагы почмак 60° ка тигез. Конусның ян өслеге мәйданы ... .
4. Пирамиданың нигезендә ягы 10 га, ә бу якка каршы ятучы почмагы 30° ка тигез булган өчпочмак ята. Пирамиданың ян кабыргалары нигез белән 60° лы почмак төзи. Пирамиданы камаучы конусның ян өслеге мәйданы ... .
5. M ноктасыннан a, P ноктасыннан b ераклыгында урнашкан нокталар күплеген табыгыз.
6. Яссылыкка бирелгән ноктада орына торган барлык сфераларның үзәкләре күплеген табыгыз.
7. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ сферасында урнашкан $A(3;\ 4;\ 12)$ ноктасы аша Oz күчәренә перпендикуляр яссылык үткәрелгән. Кисемнең радиусын табыгыз.

8. Кисек конуста нигезнең радиуслары 2 гә һәм 4 кә тигез. Конус эченә шар камалган. Конусның ян өслеге мәйданы ... .
9. Өчпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы 3 кә тигез. Ян кырлар нигезгә 45° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданы камаучы сфераның мәйданы ... .
10. Кырлары нигезгә бертигез авышкан пирамида эченә шар камалган. Шарның үзәге нигезне түбәдән башлап 2 : 1 чагыштырмасында бүлә. Ян кырларның нигезгә авышу почмагы ... .

Вариант 2

1. Цилиндрда анын күчәренә параллель итеп кисем үткәрелгән. Кисемнең диагонале 16 га тигез, һәм ул нигез яссылыгы белән 60° лы почмак төзи. Цилиндр нигезенең радиусы 5 кә тигез. Цилиндр күчәреннән кисем яссылыгына кадәр ераклыкны табыгыз.
2. Туры параллелепипедның нигезендә ягы 4 кә һәм бер почмагы 60° ка тигез булган ромб ята. Параллелепипедның биеклеге 5 кә тигез. Параллелепипед эченә камалган цилиндрның ян өслеге мәйданы ... .
3. Конус түбәсе аша нигезне m озынлыгындагы хорда буенча кисеп үтә торган яссылык үткәрелгән. Бу хорда 60° лы дуганы тартып тора. Кисемдә төзүчеләр арасындагы почмак—туры. Конусның ян өслеге мәйданы ... .
4. Өчпочмаклы төзек пирамида эченә конус камалган, пирамида нигезенең ягы 6 га, пирамиданың биеклеге 1 гә тигез. Конусның ян өслеге мәйданы ... .
5. Бирелгән кисемтә туры почмак ясап күренгән нокталар күплеген табыгыз.
6. Бирелгән яссылыкка орынучы бирелгән радиуслы барлык шарларның үзәкләре күплеген табыгыз.
7. $x^2+y^2+z^2=169$ сферасында ятучы $B(3;\ 4;\ 12)$ ноктасы аша Ox күчәренә перпендикуляр яссылык үткәрелгән. Кисем радиусын табыгыз.
8. Кисек конусның төзүчесе 6 га тигез. Бу конуска шар камалган. Конусның ян өслеге мәйданы ... .
9. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ян кабыргалары нигезгә 45° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданы камаучы сфераның мәйданы 64π. Пирамида нигезенең ягы ... .
10. Пирамиданың ян кырлары нигезгә 45° лы почмак ясап авышкан. Бу пирамида эченә шар камалган. Бу шарның үзәге, түбәсеннән башлап, пирамида биеклеген нинди чагыштырмада бүлә?

МД—3

Вариант 1

1. Дүртпочмаклы төзек призманың нигезендә диагонале d га тигез булган квадрат ята. Нигезнең диагональ һәм өске нигезнең кап-

ма-каршы ятучы түбәсе аша өске нигезгә 45° лы почмак белән яссылык үткәрелгән. Призманың күләме ... .

2. Өчпочмаклы авыш призмада ике кырның мәйданнары 30 һәм 40 ка тигез. Алар арасындагы почмак — туры. Ян кабыргасы 10 га тигез. Призманың күләмен табыгыз.
3. Өчпочмаклы авыш призманың күләме V га тигез. Нигезнең урта сызыгы һәм нигезнең уртак сызыкка каршы ятучы түбәсе аша үтүче ян кабырганың уртасы аша яссылык үткәрелгән. Кисеп алынган өчпочмаклы пирамиданың күләмен табыгыз.
4. Пирамиданың нигезендә катетлары 3 һәм 4 кә тигез булган турыпочмаклы өчпочмак ята. Ян кырлар нигезгә 45° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың күләме ... .
5. Дүртпочмаклы төзек пирамиданың ян өслеге мәйданы S ка, ә нигезнең үзәгеннән ян кырларга кадәр ераклык d га тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.
6. Пирамиданың күләме V га тигез. Пирамиданың ян кабыргасы өч тигез кисәккә бүленгән, һәм бүлену нокталарыннан нигезгә параллель яссылыклар үткәрелгән. Параллель яссылыклар арасына урнашкан кисек пирамиданың күләме ... .
7. Конус төзүчесенең уртасы аша нигез яссылыгына параллель итеп яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан кисем — аскы нигезе конус нигезендә яткан цилиндрның өске нигезе булып тора. Конусның күләме 40 ка тигез. Цилиндрның күләмен табыгыз.
8. Пирамиданың ян кабыргалары нигезгә 45° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданың нигезендә ягы 10 га һәм бу якка каршы ятучы почмагы 30° ка тигез булган өчпочмак ята. Пирамиданы камаучы конусның күләмен табыгыз.
9. Өчпочмаклы төзек призма эченә шар камалган. Призма нигезенең ягы $2\sqrt{3}$ кә тигез. Бу шарның күләмен табыгыз.
10. Шарның диаметрына перпендикуляр яссылык бу диаметрны 3 һәм 9 га тигез булган ике кисәккә бүлә. Кечерәк кисәкнең күләмен табыгыз.

Вариант 2

1. Өчпочмаклы төзек призмада нигезенең ягы a га тигез. Нигезнең ягы һәм өске нигезнең капма-каршы түбәсе аша нигезгә 45° лы почмак белән авышкан яссылык үткәрелгән. Призманың күләмен табыгыз.
2. Өчпочмаклы авыш призмада ике ян кыр үзара перпендикуляр, аларның мәйданнары 20 һәм 30 га тигез. Ян кабыргалар 5 кә тигез. Призманың күләмен табыгыз.
3. Авыш параллелепипедта нигезнең диагонале һәм каршы ятучы ян кабырганың уртасы аша яссылык үткәрелгән. Параллелепипедның күләме V га тигез. Кисеп алынган өчпочмаклы пирамиданың күләмен табыгыз.
4. Пирамиданың нигезендә почмагы 30° ка һәм ягы a га тигез булган

ромб ята. Пирамиданың ян кырлары нигез белән 60° лы почмак төзи. Пирамиданың күләмен табыгыз.

5. Өчпочмаклы төзек пирамиданың күләме V га, ә ян өслеге мәйданы S ка тигез. Нигезнең үзәгеннән ян кырларына кадәр ераклыкны табыгыз.
6. Пирамиданың ян кабыргалары 1 : 2 : 1 чагыштырмасында өч өлешкә бүленгән. Бу нокталар аша нигезгә параллель яссылыклар үткәрелгән. Параллель яссылыклар арасындагы кисек пирамида күләменең кисеп алынган пирамида күләменә чагыштырмасын табыгыз.
7. Конус төзүчесенең уртасы аша нигез яссылыгына параллель яссылык үткәрелгән. Барлыкка килгән кисем аскы нигезе конус нигезендә яткан цилиндрның өске нигезе булып тора. Цилиндрның нигезе 9 га тигез. Конусның күләмен табыгыз.
8. Пирамиданың нигезе булып яклары 6, 8 һәм 10 га тигез булган өчпочмак тора. Пирамиданың ян кабыргалары нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Пирамиданы камаучы конусның күләме ... .
9. Туры параллелепипедның нигезендә ягы $4\sqrt{3}$ кә, почмагы 60° ка тигез булган ромб ята. Бу параллелепипед эченә шар камалган. Аның күлемен табыгыз.
10. Түгәрәк секторның радиусы 6 га һәм почмагы 60° ка тигез. Сектор үзен чикләп торучы радиусларның берсе яткан туры тирәсендә әйләнә. Әйләнү җисеменең күләмен табыгыз.

КОНТРОЛЬ ЭШЛӘР

К—1 **Вариант 1**

1. Әгәр $\vec{a} + 2\vec{b}$ һәм $5\vec{a} - 4\vec{b}$ векторлары үзара перпендикуляр булса, $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ берәмлек векторлары үзара нинди почмак төзи?

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында кабырганың озынлыгы 1 гә тигез, M—DD_1C_1C кырының үзәге. Координаталар методын кулланып, 1) AM һәм B_1D турылары арасындагы почмакны; 2) AM һәм B_1D кисемтәләренең урталары арасындагы ераклыкны табыгыз.

3. Ике нокта: ординаталар күчәре өстендә яткан A һәм $B(1; 0; 1)$ нокталары бирелгән. AB турысы Oxz яссылыгы белән 30° лы почмак төзи. A ноктасының координаталарын табыгыз.

4*. $\vec{b}\{6; 8; -7{,}5\}$ векторына коллинеар һәм $\vec{j}$ координата векторы белән җәенке почмак төзүче $\vec{a}$ векторының ($|\vec{a}| = 5$) координаталарын табыгыз.

К—1 **Вариант 2**

1. $A(-1; 2; 1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 0)$ һәм $D(2; 1; 2)$ нокталары бирелгән. Исәпләгез:

1) $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{CD}$ векторлары арасындагы почмакны;

2) AB һәм CD кисемтәләренең урталары арасындагы ераклыкны.

2. $ABCA_1B_1C_1$ туры призмасының нигезендә тигезьянлы ABC өчпочмагы ята, $\angle ACB = 120°$, $AC = CB = BB_1$. Векторларны кулланып, AB һәм CB_1 турылары арасындагы почмакны табыгыз.

3. Ике нокта: Oxy яссылыгында ятучы A һәм $B(1; 1; 1)$ нокталары бирелгән, A ноктасының абсциссасы ординатасына тигез. AB турысы Ozy яссылыгы белән 30° лы почмак төзи. A ноктасының координаталарын табыгыз.

4*. $\vec{a}\{7; 0; 0\}$ һәм $\vec{b}\{0; 0; 3\}$ векторлары бирелгән. Һәрберсе өчен $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} = 0$ һәм $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{b} = 0$ шартлары (O — координаталар башлангычы) үтәлә торган M нокталары күплеген табыгыз.

К—1 **Вариант 3**

1. $\vec{a}$ һәм $\vec{b}$ векторлары бирелгән. $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 135°$. $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ны табыгыз.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубында кабырганың озынлыгы 1 гә тигез, M — A_1D_1 кабыргасының уртасы. Координаталар методын кулланып исәпләгез:

1) A_1C һәм C_1M турылары арасындагы почмакны;

2) A_1C һәм C_1M кисемтәләренең урталары арасындагы ераклыкны.

3. Ике нокта: аппликаталар күчәрендә ятучы A һәм $B(2;\ 2;\ 0)$ ноктталары бирелгән. AB турысы Oxy яссылыгы белән 60° лы почмак төзи. A ноктасының координаталарын табыгыз.

4*. $\vec{a}\ \{8;\ -10;\ 13\}$ векторына коллинеар булган $\vec{b}$ векторы Oz күчәренең уңай юнәлеше белән кысынкы почмак төзи, $|\vec{b}| = \sqrt{37}$. $\vec{b}$ векторының координаталарын табыгыз.

К—1 **Вариант 4**

1. $E(1;\ -2;\ 2)$, $F(3;\ 0;\ 2)$, $K(0;-2;\ 3)$, $T(2;\ 4;\ 1)$ нокталары бирелгән. Исәпләгез:

1) $\overrightarrow{EF}$ һәм $\overrightarrow{KT}$ векторлары арасындагы почмакны;

2) EF һәм KT кисемтәләренең урталары арасындагы ераклыкны.

2. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек призмасында барлык кабыргалар да үзара тигез. Векторларны кулланып, A_1C һәм AB турылары арасындагы почмакны табыгыз.

3. Ике нокта: Oxz яссылыгында ятучы M һәм $P(1;\ 2;\ 1)$ нокталары бирелгән, M ноктасының абциссасы аппликатасына тигез. PM турысы xOy яссылыгы белән 30° лы почмак төзи. M ноктасының координаталарын табыгыз.

4*. $\vec{c}\ \{0;\ -2;\ 0\}$ һәм $\vec{b}\ \{0;\ 0;\ 5\}$ векторлары бирелгән. Һәрберсе өчен $\overrightarrow{OE} \cdot \vec{b} = 0$ һәм $\overrightarrow{OE} \cdot \vec{c} = 0$ шартлары үтәлә торган E нокталары күплеген табыгыз, биредә O — координаталар башлангычы.

К—2 **Вариант 1**

1. Бер почмагы 45° булган турыпочмаклы трапеция зуррак нигезен эченә алган туры тирәсендә әйләнә. Әгәр трапециянең нигезләре 3 һәм 5 кә тигез булса, әйләнү җисеменең күләмен табыгыз.

2. R радиуслы шар эченә конус камалган. Конусның төзүчесе нигез яссылыгы белән φ почмагы төзи.

1) Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

2) Әгәр $\varphi = 30°$ булса, конус түбәсе аша үтә торган кисем мәйданының мөмкин булган иң зур кыйммәтен табыгыз.

3*. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ сферасы координата күчәрләрен A, B, һәм C нокталарында кисеп уза; A — Ox күчәре белән кисешү ноктасы, B — Oy күчәре белән, ә C — Oz күчәре белән (бу нокталарның барысының да координаталары уңай). ABC яссылыгы белән $z = 0$ яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

К—2 **Вариант 2**

1. Цилиндрда күчәргә параллель һәм нигез әйләнәсеннән 90° лы дуга кисеп алучы яссылык үткәрелгән. Кисемнең диагонале 10 га һәм аның күчәрдән ераклыгы 4 кә тигез. Цилиндрның ян өслеге мәйданын табыгыз.

2. Өчпочмаклы төзек пирамидада ян кырлар нигезгә 60° лы почмак белән авышкан. Бу пирамида эченә R радиуслы шар камалган.

1) Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

2) Шар өслеге пирамиданың ян кырларына орынган әйләнә озынлыгын табыгыз.

3*. $M(-7; 3; -4)$ ноктасыннан $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 27 = 0$ сферасына орынма үткәрелгән. Орынманың M ноктасыннан алып орыну ноктасына кадәргә озынлыгын табыгыз.

К—2 **Вариант 3**

1. Ягы a га, A почмагы 60° ка тигез булган $ABCD$ ромбы C түбәсе аша AC диагоналенә перпендикуляр үтүче туры тирәсендә әйләнә. Әйләнү җисеменең өслек мәйданын табыгыз.

2. Өчпочмаклы төзек пирамида нигезенең ягы a га тигез, ә ян кабыргалары нигезгә α почмагы ясап авышкан.

1) Пирамиданы камап торучы сфераның мәйданын табыгыз.

2) Әгәр $\alpha = 30°$ булса, сфераның нигез түбәләренең берсенә үткәрелгән радиусы белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

3*. $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$ сферасы ординаталар күчәрен A ноктасында ($y < 0$) кисеп үтә. $M(1; 1; 0)$ ноктасы аша, Oz күчәренә параллель итеп, сфераны B ноктасында кисеп үтүче туры үткәрелгән ($z > 0$). AB турысы һәм xOy яссылыгы арасындагы почмакны табыгыз.

К—2 Вариант 4

1. Конус түбәсе аша үткәрелгән яссылык нигезне озынлыгы 3 кә тигез булган һәм 120° лы дуганы тартып торучы хорда буенча кисеп үтә. Кисем яссылыгы нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Конусның ян өслеге мәйданын табыгыз.

2. Дүртпочмаклы төзек пирамида эченә шар камалган. Шар үзәгеннән пирамида түбәсенә кадәр ара a га тигез. Ян кырлар нигезгә 60° лы почмак белән авышкан.

1) Пирамиданың ян өслеге мәйданын табыгыз.

2) Пирамиданың ян өслегенә сфера орынган әйләнә белән чикләнгән түгәрәкнең мәйданын табыгыз.

3*. M (4; 2; 8) ноктасы аша Oz күчәренә параллель һәм Oxz һәм Ozy яссылыклары белән 45° лы почмак төзи торган яссылык үткәрелгән. $x^2+y^2+z^2=25$ сферасы бу яссылыкны кискәндә килеп чыккан әйләнә озынлыгын табыгыз.

К—3 Вариант 1

1. Өчпочмаклы төзек пирамидада ян кырлар нигез белән 60° лы почмак төзи. Нигезнең үзәгеннән ян кырга кадәр ераклык $2\sqrt{3}$ кә тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

2. Цилиндрда аның күчәренә параллель һәм нигез әйләнәсеннән 2α зурлыгындагы дуга кисеп ала торган яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан кисемнең диагонале цилиндр күчәре белән φ почмагы төзи һәм аннан d ераклыгында ята. Цилиндрның күләмен табыгыз.

3*. 1 нче мәсьәләдә күрсәтелгән пирамида эченә аның ян өслегенә ниндидер әйләнә буйлап орынучы шар камалган. Бу әйләнә яткан яссылык шарны ике өлешкә бүлә. Кечерәк өлешнең күләмен табыгыз.

К—3 Вариант 2

1. Дүртпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ төзек призмасында C ноктасыннан чыккан өч кабырганың очлары аша яссылык үткәрелгән. Бу яссылык C түбәсеннән $4\sqrt{2}$ ераклыгында ята һәм нигез яссылыгы белән 45° лы почмак төзи. Призманың күләмен табыгыз.

2. Конусның түбәсе аша нигез яссылыгына φ почмагы белән яссылык үткәрелгән. Ул нигез әйләнәсеннән 2α зурлыгындагы дуга кисеп ала. Конусның нигез радиусы R га тигез. Конусның күләмен табыгыз.

3*. 1 нче мәсьәләдә күрсәтелгән призмада аның диагоналенә перпендикуляр һәм диагональне 1 : 3 чагыштырмасында бүлә торган яссылык үткәрелгән. Бу яссылык призманы камаучы шарны ике өлешкә бүлә. Кечерәк өлешнең күләмен табыгыз.

К—3 Вариант 3

1. Дүртпочмаклы төзек пирамидада ян кырлар нигезгә 60° лы почмак ясап авышкан. Пирамида биеклегенең уртасыннан ян кырга кадәр ара 2 гә тигез. Пирамиданың күләмен табыгыз.

2. Цилиндрда аның күчәренә параллель һәм нигез яссылыгыннан φ зурлыгындагы дуга кисеп ала торган яссылык үткәрелгән. Килеп чыккан кисемнең диагонале $2m$ га тигез һәм цилиндр күчәреннән m ераклыгында ята. Цилиндрның күләмен табыгыз.

3*. 1 нче мәсьәләдә күрсәтелгән пирамида эченә аның ян өслегенә ниндидер әйләнә буйлап орынучы шар камалган. Бу әйләнә яткан яссылык шарны ике өлешкә бүлә. Кечерәк өлешнең мәйданын табыгыз.

К—3 Вариант 4

1. $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы төзек призмасында аскы нигезнең BC ягы һәм каршы ятучы A_1 түбәсе аша, нигез яссылыгына 45° лы почмак белән, яссылык үткәрелгән. Бу яссылык белән A түбәсе арасы 2 гә тигез. Призманың күләмен табыгыз.

2. Конус түбәсе аша, нигез яссылыгына φ почмагы белән, нигез әйләнәсеннән α зурлыгындагы дуга кисеп алучы яссылык үткәрелгән. Конусның биеклеге h ка тигез. Конусның күләмен табыгыз.

3*. 1 нче мәсьәләдә күрсәтелгән призманы шар камаган. Шарның ян кыр яссылыгы белән кисеп алынган кечерәк өлешенең күләмен табыгыз.

К—4 Вариант 1

MABCD дүртпочмаклы төзек пирамидасында нигезнең ягы 6 га, ян кабыргасы 5 кә тигез. Исәпләгез:

1) пирамиданың ян өслеге мәйданын;
2) пирамиданың күләмен;
3) ян кырның нигез яссылыгына авышу почмагын;
4) векторларның скаляр тапкырчыгышын: $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AM}$;
5) пирамиданы камаучы шарның өслек мәйданын;
6)* BD һәм DMC яссылыгы арасындагы почмакны.

К—4 Вариант 2

$MABC$ өчпочмаклы төзек пирамидасында нигезнең ягы $4\sqrt{3}$ кә, ә ян кабыргасы 5 кә тигез. Исәпләгез:

1) пирамиданың ян өслеге мәйданын;
2) пирамиданың күләмен;
3) ян кабырга белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны;
4) векторларның скаляр тапкырчыгышын: $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\overrightarrow{EA}$, биредә E — BC ның уртасы;
5) пирамида эченә камалган шарның күләмен;
6)* нигез ягы белән ян кыр яссылыгы арасындагы почмакны.

К—4 Вариант 3

$MABCD$ дүртпочмаклы төзек пирамидасында ян кабырга 8 гә тигез һәм нигез яссылыгына 60° лы почмак белән авышкан. Исәпләгез:

1) пирамиданың ян өслеге мәйданын;
2) пирамида күләмен;
3) каршы ятучы ян кырлар арасындагы почмакны;
4) векторларның скаляр тапкырчыгышын: $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\overrightarrow{ME}$, биредә E — DC ның уртасы;
5) пирамиданы камаучы шарның күләмен;
6)* AM ян кабыргасы белән DMC яссылыгы арасындагы почмакны.

К—4 Вариант 4

1. $MABC$ өчпочмаклы төзек пирамидасында нигез ягы $2\sqrt{3}$ кә тигез, ә ян кырлар нигез белән 60° лы почмак төзи. Исәпләгез:

1) пирамиданың ян өслеге мәйданын;
2) пирамиданың күләмен;
3) ян кабырга белән нигез яссылыгы арасындагы почмакны;
4) векторларның скаляр тапкырчыгышын: $\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB})\overrightarrow{OM}$, биредә O — пирамида биеклегенең нигезе;
5) пирамида эченә камалган шарның өслек мәйданын;
6)* ME һәм AMC яссылыгы арасындагы почмакны, биредә E — BC ның уртасы.

Мөстәкыйль эшләр

М—1

1. *вар.* **1.** 1) $B(-2;\ -2;\ 0)$, $D(2;\ 2;\ 0)$, $C(-2;\ 2;\ 0)$, $A_1(2;\ -2;\ 4)$, $B_1(-2;\ -2;\ 4)$, $D_1(2;\ 2;\ 4)$, $C_1(-2;\ 2;\ 4)$.

2) $\overrightarrow{OD}\{2;\ 2;\ 0\}$, $\overrightarrow{OC_1}\{-2;\ 2;\ 4\}$, $\overrightarrow{OM}\{0;\ 2;\ 2\}$, $\overrightarrow{OD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$. $\overrightarrow{OC_1} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OM} = 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Әйе, булырлар.

2 *вар.* **1.** 1) $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$, $D(2;\ 4;\ 0)$, $A_1(2;\ 0;\ 4)$, $B_1(-2;\ 0;\ 4)$, $C_1(-2;\ 4;\ 4)$, $D(2;\ 4;\ 4)$.

2) $\overrightarrow{OC}\{-2;\ 4;\ 0\}$, $\overrightarrow{OB}\{-2;\ 0;\ 4\}$, $\overrightarrow{OK}\{-2;\ 2;\ 2\}$, $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$, $\overrightarrow{OB_1} = -2\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{OK} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Әйе, булырлар.

3. *вар.* **1.** 1) $C(0;\ 0;\ 0)$, $B(-5;\ 0;\ 0)$, $A(0;\ -5\sqrt{3};\ 0)$, $D(-5;\ 0;\ 5\sqrt{3})$.

2) $\overrightarrow{CM}\left\{-\frac{10}{3};\ -\frac{5\sqrt{3}}{3};\ \frac{5\sqrt{3}}{3}\right.$, $\overrightarrow{CM} = -\frac{10}{3}\vec{i} - \frac{5\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\vec{k}$.

2. Әйе, яталар.

4 *вар.* **1.** 1) $A(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 4;\ 0)$, $B(-4\sqrt{3};\ 4;\ 0)$, $D(-4\sqrt{3};\ 4;\ 12)$.

2) $\overrightarrow{AK}\left\{-\frac{8\sqrt{3}}{3};\ 4;\ 4\right\}$, $\overrightarrow{AK} = -\frac{8\sqrt{3}}{3}\vec{i} + 4\vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$.

2. $m = -6$, $n = 2$.

5 *вар.* **1.** O ноктасыннан AC га OE перпендикулярын төшерәбез һәм E ноктасын D ноктасы белән тоташтырабыз. Ул вакытта $\angle DEO = 45°$, $OE = OD = 12$, $D(0;\ 0;\ 12)$. DOE өчпочмагында DE га OK перпендикулярын төшерәбез. $OK \perp ADC$, $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD})$, икәнлеге җиңел исбатлана, биредә K — ED ның уртасы ($OE = OD$). Мәсьәләне чишү өчен E ноктасының координаталарын табарга кирәк. $EF \perp OC$ ны төзибез, OFE һәм AOC өчпочмакларының охшашлыгыннан $EF = \frac{36}{5}$ һәм $OF = \frac{48}{5}$ не табабыз. Ул вакытта $E\left(\frac{48}{5};\ -\frac{36}{5};\ 0\right)$. Моннан соңгы чишү җиңел башкарыла.

Җавап. 1) $A(0;\ -20;\ 0)$, $B(-15;\ 0;\ 0)$, $C(15;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 0;\ 12)$.

2) $\overrightarrow{OK}\{4{,}8;\ -3{,}6;\ 6\}$, $\overrightarrow{OK} = 4{,}8\vec{i} - 3{,}6\vec{j} + 6\vec{k}$.

2. $m = 3$ булганда. Бу очракта $c = a + b$ һәм векторлар компланар.

6 *вар.* **1.** 1) $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ -1;\ 0\right)$, $C\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ 1;\ 0\right)$, $B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\ 0;\ 0\right)$, $D(0;\ 0;\ 1)$.

2) $OA = \frac{2}{\sqrt{3}}$ һәм $OD = 1$ булганлыктан, $\frac{AK}{KD} = \frac{AO^2}{DO^2} = \frac{4}{3}$. Ул вакытта $\overrightarrow{OK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OA}$. Моннан соңгы чишү җиңел башкарыла.

Җавап. $\overrightarrow{OK}\left\{\frac{3}{7\sqrt{3}};\ -\frac{3}{7};\ \frac{4}{7}\right\}$, $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{7\sqrt{3}}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{4}{7}\vec{k}$.

2. $y = 6$ булганда. Бу очракта $\vec{p} = 2\vec{m} + 2\vec{n}$ һәм векторлар компланар.

7 *вар.* **1.** Призманы турыпочмаклы координаталар системасына түбәндәгечә урнаштырабыз: B ноктасы координаталар башлангычына туры килә, ә Ox, Oy һәм Oz күчәрләре тиңдәшле рәвештә BA, BC һәм BB_1 нурлары белән бер юнәлештә була. Призманың ян кабыргалары һәм нигезенең катетлары 1 гә тигез булсын. Бу вакытта $F(1;\ 0;\ \frac{1}{2})$, $M(\frac{1}{2};\ 0;\ 1)$, $E(0;\ \frac{1}{6};\ 1)$ һәм $K(0;\ \frac{1}{2};\ 0)$. EK, EM һәм EF векторларының компланар булу-булмавын билгеләргә кирәк. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BM}\left\{\frac{1}{2};\ 0;\ 1\right\}$, $\overrightarrow{BE}\left\{0;\ \frac{1}{6};\ 1\right\}$ булганлыктан, $\overrightarrow{EM}\left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{6};\ 0\right\}$. Шул ук юл белән $\overrightarrow{EF}\left\{1;\ -\frac{1}{6};\ -\frac{1}{2}\right\}$ һәм $\overrightarrow{EK}\ \left\{0;\ \frac{1}{3};\ -1\right\}$ икәнлеген табабыз. Әгәр күрсәтелгән векторлар компланар булса, $\overrightarrow{EK} = x\overrightarrow{EM} + y\overrightarrow{EF}$ үтәлерлек x һәм y булырга тиеш. Түбәндәге системаны табабыз:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y = \frac{1}{3} \\ 0 - \frac{1}{2}y = -1 \end{cases}$$

Бу системаны чишеп, $x = -4$ һәм $y = 2$ табабыз. Димәк, $\overrightarrow{EK} = -4\overrightarrow{EM} + 2\overrightarrow{EF}$. Шулай итеп, күрсәтелгән нокталарның бер яссылыкта ятуы исбатланды.

2. $\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{m}$, $x\vec{p}\{x;\ -2x;\ x\}$, $y\vec{q}\{2y;\ 0;\ -y\}$, $z\vec{m}\{-z;\ z;\ 2z\}$, $a\{x + 2y - z;\ -2x + z;\ x - y + 2z\}$. Базис буенча таркату бердәнбер булганлыктан,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x + z = 2 \\ x - y + 2z = -2. \end{cases}$$

Моннан $x = 1;\ y = 1;\ z = 0$.

Җавап. $\vec{a} = -\vec{p} + \vec{q} + 0 \cdot \vec{m}$.

8 *вар.* **1.** Бу мәсьәлә 7 варианттагы 1 мәсьәлә кебек чишелә. Әгәр кабыргасы 1 гә тигез булган кубны турыпочмаклы координаталар системасына, B ноктасы — координаталар башлангычы, ә Ox, Oy һәм Oz күчәрләре тиңдәшле рәвештә BA, BC һәм BB_1 нурлары белән бер юнәлешле итеп урнаштырылса, $\overrightarrow{PK} = 2\overrightarrow{PF} + 2\overrightarrow{PM}$ икәнен табарга мөмкин. Моның белән күрсәтелгән нокталарның бер яссылыкта ятуы исбатлана.

2. $\vec{m} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$. Мәсьәлә 7 вариантның 2 мәсьәләсе кебек чишелә.

М—2

1 *вар.* **1.** $\sqrt{34}$; $\sqrt{6} + 2\sqrt{14}$.

2. 1) $C(3; 0; -4)$; 2) $BC = 3$; 3) $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2 *вар.* **1.** $\sqrt{42}$; $2\sqrt{6} - \sqrt{14}$.

2. 1) $C(-1; 0; 1)$; $D(2; 2; 0)$; 2) $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

3 *вар.* **1.** 9. **2.** $\vec{a}\{-8; 8; 4\}$.

4 *вар.* **1.** $\sqrt{10}$. **2.** $\vec{m}\{3; -6; -3\}$.

5 *вар.* **1.** Призманы турыпочмаклы координаталар системасына түбәндәгечә урнаштырабыз: координаталар башлангычы B ноктасы белән тәңгәл килә, ә Ox, Oy һәм Oz күчәрләре тиңдәшле рәвештә BA, BC һәм BB_1 нурлары белән бер юнәлештә урнаша. Мәсьәләне чишкәндә, P ноктасының DC_1C өчпочмагында медианалар кисешү ноктасы һәм $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$ икәнен исәпкә алырга кирәк.

Җавап. $\frac{\sqrt{53}}{6}$.

2. M ноктасы AB турысында ятканлыктан, $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. Аның координаталары $M(x; y; z)$ булсын. Ул вакытта $\overrightarrow{AM}\{x + 1; y - 2; z - 1\}$. Икенче яктан, $\overrightarrow{AM}\{3k; -k; -2k\}$, $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{2k^2+k^2+4k^2} = |k|\sqrt{14}$. Шарт буенча $|\overrightarrow{AM}| = 3\sqrt{14}$. Димәк, $k = \pm 3$.

$$\begin{cases} x + 1 = 3k \\ y - 2 = -k \\ z - 1 = -2k \end{cases} \text{ булганлыктан, } \begin{cases} x = 8 \\ y = -1 \\ z = -5 \end{cases} \text{ яки } \begin{cases} x = -10 \\ y = 5 \\ z = 7. \end{cases}$$

Җавап. $M(8; -1; -5)$ яки $M(-10; 5; 7)$.

6 *вар.* **1.** $\sqrt{\frac{89}{3}}$.

2. $P(-16;\ 7;\ -3)$. Мәсьәлә 5 варианттагы мәсьәлә кебек чишелә.

7 *вар.* Тетраэдрны турыпочмаклы координаталар системасына координаталар башлангычы E ноктасы белән тәңгәл килерлек итеп урнаштырабыз. Ox күчәре EB турына капма-каршы юнәлештә, Oy күчәре — EC нуры белән бер юнәлештә, ә Oz күчәре BD нуры белән бер юнәлештә булсын. $P(x;\ y;\ z)$ дип уйлыйбыз. Сайлап алынган координаталар системасында $A(0;\ -2;\ 0)$, $B(-4;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, $D(-4;\ 0;\ 4)$. P ноктасы тетраэдрның барлык түбәләреннән дә бер үк ераклыкта булганлыктан,

$$\sqrt{x^2+(y+2)^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}=$$
$$=\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x+4)^2+y^2+(z-4)^2}.$$

Моннан $x=-\frac{3}{2}$, $y=0$ һәм $z=2$; $P\left(-\frac{3}{2};\ 0;\ 2\right)$; $AP=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4+4}=$ $=\sqrt{\frac{41}{2}}$.

2. $\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$ — $M(x;\ y;\ z)$ һәм $A(1;\ 0;\ 0)$ нокталары арасындагы, ә $\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}$ — $M(x;\ y;\ z)$ һәм $B(0;\ 1;\ 0)$ нокталары арасындагы ераклык, $AB=\sqrt{2}$ булганлыктан, $MA+MB\geq\sqrt{2}$, ә шарт буенча $MA+MB=1$. Димәк, тигезләмәнең чишелеше булмый.

8 *вар.* **1.** 3.

2. AB кисемтәсендәге барлык нокталарның координаталары тигезләмәнең чишелеше була, биредә $A(0;\ 0;\ 1)$ һәм $B(1;\ 0;\ 0)$. Мәсьәлә 7 варианттагы мәсьәлә кебек чишелә.

М—3

1 *вар.* **1.** 1) $-\frac{a^2}{2}$; 2) 0. **2.** Кысынкы.

2 *вар.* **1.** 1) $-a^2$; 2) 0. **2.** Җәенке.

3 *вар.* **1.** 1) $-\frac{3a^2}{2}$; 2) 0. **2.** $180°-\arccos\frac{5}{13}$.

4 *вар.* **1.** 1) $-\frac{3a^2}{4}$; 2) 0. **2.** $\arccos\frac{3}{5}$.

5 *вар.* **1.** $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$ векторы $\vec{i}$ векторы белән α почмагы, $\vec{j}$ векторы белән β почмагы, ә $\vec{k}$ векторы белән γ почмагы төзесен. Моннан

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Бу очракта

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$$

Шарт буенча $\alpha = 120°$, $\gamma = 135°$ һәм, димәк,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\beta + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Моннан $\cos\beta = \pm\frac{1}{2}$.

Җавап. 60° яки 120°.

2. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. Кубны турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырырга һәм өчпочмактагы бер почмакның синусын табарга кирәк.

6 *вар*. **1.** 45° яки 135°.

2. $\frac{\sqrt{21}}{8}$. 5 вариант мәсьәләләренә күрсәтмәне карагыз.

7 *вар*. **1.** $2\sqrt{6}$. Пирамида түбәсе M ның BAD почмагы биссектрисасына, ягъни AC га проекцияләнүен исәпкә алырга кирәк. Мәсьәләне чишү өчен $\overrightarrow{AM}$ һәм $\overrightarrow{AC}$ векторлары арасындагы почмакның синусын табарга кирәк.

2. $\vec{a}\left\{\sqrt{\sin^2 x + 0,5};\ \sqrt{\cos^2 x - 0,5};\ \sqrt{0,5}\right\}$ һәм $\vec{b}\{1;\ 1;\ 1\}$ векторларын тикшерәбез. Аларның скаляр тапкырчыгышы:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5}.$$

Икенче төрле язсак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,$$

биредә $\varphi = \widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$, $|\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x + 0,5 + \cos^2 x - 0,5 + 0,5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$;

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{3}\ \cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos\varphi.$

Скаляр тапкырчыгышның иң зур кыйммәте $\frac{3}{\sqrt{2}}$ гә тигез. Шулай итеп, $\sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5}$ аңлатмасының иң зур кыйммәте $3\sqrt{0,5}$ кә тигез. Аңа $x = \pi k$ булганда ирешелә, $k \in Z$.

8 *вар*. **1.** $2\sqrt{2}$. D түбәсенең BAC почмагы биссектрисасына, ягъни $\overrightarrow{AK}$ га проекцияләнүе исәпкә алына. Мәсьәләне чишү өчен $\overrightarrow{AD}$ һәм $\overrightarrow{AK}$ векторлары арасындагы почмакның синусын табарга кирәк.

2. $\vec{a}\left\{\sqrt{1+x};\ \sqrt{1-x}\right\}$ һәм $\vec{b}\{1;\ 1\}$ векторларын тикшерәбез. Аларның скаляр тапкырчыгышы $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$.

Икенче төрле язсак,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,$$

биредә $\varphi = \widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$, $|\vec{a}| = \sqrt{1+x+1-x} = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\varphi = 2\cos\varphi.$$

Скаляр тапкырчыгышның иң зур кыйммәте 2 гә тигез. Димәк, $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+1$ аңлатмасының иң зур кыйммәте 3 кә тигез. Аңа $x=0$ булганда ирешелә.

М—4

1 *вар*. **1.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 71^\circ 34'$; $\arccos\frac{1}{\sqrt{14}}$.

2 *вар*. **1.** $\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}} \approx 79^\circ 6'$; $\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

3 *вар*. **1.** $\angle ACB = 90^\circ$ икәнлеген исбатларга кирәк, ул вакытта $AB = 5$.

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{BC}\cdot\vec{BA} + \vec{CA}\cdot\vec{CB} = \vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{AB}\cdot\vec{CB} + \vec{CA}\cdot\vec{CB} =$$
$$= \vec{AB}\cdot(\vec{AC}+\vec{CB}) + \vec{CA}\cdot\vec{CB} = \vec{AB}^2 + \vec{CA}\cdot\vec{CB} = 25 + 0 = 25.$$

Җавап. 25.

2. $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ һәм $\vec{CC_1}$—базис векторлар. Ул чагында $\vec{EF} = \vec{EC} + \vec{CB} + \vec{BF} = -\frac{1}{2}\vec{CA} + \vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{CC_1}$;

$$\vec{EF}^2 = \frac{1}{4}\vec{CA}^2 + \vec{CB}^2 + \frac{1}{4}\vec{CC_1}^2 - \vec{CA}\cdot\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{CA}\cdot\vec{CC_1} + \vec{CB}\cdot\vec{CC_1} =$$

$$= \frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{1}{4}a^2 - a^2\left(-\frac{1}{2}\right) - 0 + 0 = 2a^2.$$

$$\vec{EF} = a\sqrt{2},\ \vec{EF}\cdot\vec{CC_1} = \frac{1}{2}\vec{CC_1} = \frac{1}{2}a^2,$$

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{EF}\cdot\vec{CC_1}}{|\vec{EF}|\cdot|\vec{CC_1}|}\right| = \frac{a^2}{2a\cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}};\ \varphi = \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 69^\circ 18'$$

Җавап. 1) $a\sqrt{2}$; 2) $\approx 69^\circ 18'$.

4 *вар*. **1.** 100.

2. 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}} \approx 65^\circ 54'$. Мәсьәлә 3 вариант мәсьәләсе кебек чишелә.

5 *вар*. **1**. Призманы турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырабыз. D ноктасы — координаталар башлангычы булсын. Ox күчәренең уңай юнәлеше DB нурына капма-каршы, Oy күчәре-

нең уңай юнәлеше — DC нурының юнәлеше белән, ә Oz күчәренең уңай юнәлеше CC_1 нуры юнәлеше белән туры килә. Табарга тиешле почмакны φ дип билгелибез. $\vec{CB_1}\{-4;\ -2;\ 2\}$; $\vec{AB_1}\{-4;\ 2;\ 2\}$ икәнен табабыз. Ул вакытта

$$\sin\varphi = \left|\frac{\vec{CB_1}\cdot\vec{AB_1}}{|\vec{CB_1}|\cdot|\vec{AB_1}|}\right| = \left|\frac{16-4+4}{\sqrt{16+4+4}\cdot\sqrt{16+4+4}}\right| = \frac{2}{3},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{2}{3} \approx 41^\circ 49'$$

2. $BD = BC = BA = 1$ һәм E — DC ның уртасы булсын.

$$\vec{AE} = \vec{BE} - \vec{BA} = \frac{1}{2}\vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{BC} - \vec{BA}.$$

$$\vec{AE}\cdot\vec{BD} = \left(\frac{1}{2}\vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{BC} - \vec{BA}\right)\cdot\vec{BD} =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{BD}^2 + \frac{1}{2}\vec{BC}\cdot\vec{BD} - \vec{BA}\cdot\vec{BD} = \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0.$$

Моннан $AE\perp BD$ икәне килеп чыга. Шул ук юл белән $AE\perp BC$ һәм DAC һәм DBC яссылыкларының перпендикуляр икәнен исбатларга мөмкин.

6 *вар.* **1.** $\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 43^\circ 59'$. Мәсьәлә 5 варианттагы 1 мәсьәлә кебек чишелә.

2. $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ һәм $\vec{BB_1}$ — базис векторлар.

$$\vec{BD_1} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB_1},\ \vec{A_1C_1} = \vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA},$$

$$\vec{B_1D_1}\cdot\vec{A_1C_1} = (\vec{BA}+\vec{BC}+\vec{BB_1})\cdot(\vec{BC}-\vec{BA}) = \vec{BC}^2 - \vec{BA}^2 = 1-4 = -3 \neq 0.$$

Димәк, BD_1 — A_1C_1 гә перпендикуляр түгел, ә BD_1 — A_1C_1D яссылыгына перпендикуляр түгел.

7 *вар.* **1.** M түбәсеннән ABC яссылыгына MO перпендикулярын төшерәбез. Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча $OA\perp AC$. O ноктасының ABC өчпочмагының тышында ятуы аермачык. $\angle MAO = \varphi$ дип билгелибез.

$$\angle MAO = 180^\circ - \widehat{CB\ MA}$$

$$\vec{MB} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CB};\ MB^2 = MA^2 + AC^2 + CB^2 + 2\vec{MA}\cdot\vec{AC} + 2\vec{MA}\cdot\vec{CB} +$$
$$+2\vec{AC}\cdot\vec{CB} = 16 + 9 + 25 + 0 + 2\cdot 4\cdot 5\ \cos(180^\circ-\varphi) + 0 =$$
$$= 50 + 40\cos(180^\circ-\varphi).$$

Шарт буенча $\overrightarrow{MB}=\sqrt{30}$. Ул вакытта $50-40\cos\varphi=30$, $\cos\varphi=\frac{1}{2}$ həм $\varphi=60°$. Пирамиданың биеклеге $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}\cdot\sin 60°=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

2. $DA=DB=DC=1$ həм $\angle ADC=\alpha$, $\angle ADB=\beta$, $\angle CDB=\gamma$ булсын.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}^2=$$
$$=\cos\gamma-\cos\beta-\cos\alpha+1,\ \cos\beta<0,\ \cos\alpha<0.$$

Димәк, $-\cos\beta>0$ həм $-\cos\alpha>0$, $|\cos\gamma|<1$, шуңа күрә $1+\cos\gamma>0$. Бу очракта $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>0$ həм $\angle ABC$ — кысынкы. Шул ук юл белән калган почмакларның да кысынкы икәнен исбатларга мөмкин.

8 *вар*. **1.** $\frac{3\sqrt{6}}{4}$. Мәсьәлә 7 варианттагы 1 мәсьәлә кебек чишелә.

2. M түбәсеннән $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{MK}$ həм $\overrightarrow{MP}$ векторлары белән бер үк юнәлештәге $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ həм $\overrightarrow{MD}$ берәмлек векторларын үлчәп салабыз. Ул вакытта $ABCD$ — квадрат həм $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

$$(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB})=0;$$
$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0.$$
$$\cos\alpha-\cos\beta-1+\cos\alpha=0.$$
$$\cos\beta=2\cos\alpha-1 \text{ həм } \beta=\arccos(2\cos\alpha-1).$$

М—5

1 *вар*. **1.** а) $(-100; -200; -1)$; б) $(100; 200; -1)$.

2. Хәрәкәт вакытында кисемтә үзенә тигез кисемтәгә чагылганлыктан, өчпочмакның һәрбер ягы үзенә тигез кисемтәгә чагылдырыла, димәк, бирелгән өчпочмак яклары тиңдәшле рәвештә тигез булган икенче өчпочмакка, ягъни үзенә тигез булган өчпочмакка чагылдырыла.

2 *вар*. **1.** а) $(-0{,}01; -0{,}02; -1)$; б) $(0{,}1; 0{,}1; 0)$.

2. Мәсьәлә 1 варианттагы 2 мәсьәлә кебек чишелә.

3 *вар*. **1.** Күрсәтмә. а) AB кисемтәсе уртасының координаталарын исәпләгез; б) BC кисемтәсе уртасының координаталарын исәпләгез.

2. a турысы белән чикләнгән α həм β ярымъяссылыкларыннан төзелгән həм сызыкча почмагы lk булган икекырлы почмакны тикшерәбез, биредә l həм k — α həм β яссылыкларында ятучы нурлар. Хәрәкәт вакытында $a\to a_1$, $\alpha\to\alpha_1$, $\beta\to\beta_1$, $k\to k_1$, $l\to l_1$. Димәк, a_1 турысы α_1 həм β_1 ярымъяссылыкларының уртак чиге булачак, həм бу ярымъяссылыкларда l_1 həм k_1 нурлары урнашачак. Хәрәкәт нәтиҗәсендә почмаклар саклангантлыктан, lk həм l_1k_1 почмаклары

үзара тигез. Шулай итеп, хәрәкәт вакытында икекырлы почмак үзенә тигез булган икекырлы почмакка чагылдырыла.

4 *вар*. **1.** а) {3; 3; 3}; б) к ү р с ә т м ә. AB кисемтәсенең уртасын табыгыз.

2. AB турысы α яссылыгын A ноктасында кисеп үтә һәм аның белән φ почмагы төзи дип алабыз. C — B ноктасының α яссылыгына проекциясе булсын. α яссылыгында C ноктасы аша b турысын үткәрәбез. $BC \perp b$ икәне үзеннән үзе аңлашыла. Хәрәкәт нәтиҗәсендә $\alpha \to \alpha_1$, $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ һәм $b \to b_1$ булсын. A_1B_1 турысы α_1 яссылыгын кисеп үтәчәк, ә A_1C_1 һәм b_1 турылары α_1 яссылыгында ятачак. Хәрәкәт вакытында почмаклар сакланганлыктан, $B_1C_1 \perp b$. Димәк, $B_1C_1 \perp A_1C_1$ һәм $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$. Шулай итеп, хәрәкәт нәтиҗәсендә φ почмагын төзүче туры һәм яссылык φ_1 почмагын төзүче туры һәм яссылыкка чагылдырыла.

5 *вар*. **1.** Барыннан да элек, $A(10; 20; 0)$ ноктасының Oxy яссылыгында ятуын искәртик. a турысына карата күчәр симметриясе вакытында A ноктасы $B(x; y; z)$ ноктасына чагылдырыла. Ул вакытта AB кисемтәсенең уртасы булган M ноктасының координаталары $(k; k; 0)$ була (биредә $k \neq 0$), чөнки M a турысында ятмый һәм координаталар башлангычы — O ноктасы белән тәңгәл килми. Димәк, $MA \perp MO$ һәм $(10 - k)k + (20 - k)k = 0$, моннан $k = 15$. Кисемтә уртасының координаталар формуласыннан

$$15 = \frac{10 + x}{2}, \quad 15 = \frac{20 + y}{2} \text{ һәм } 0 = \frac{0 + z}{2}.$$

икәнен табабыз, моннан $A_1(20; 10; 0)$.

2. Пространствоның үз-үзенә чагылдырылуының бу очрагында ирекле алынган $A_1(x_1; y_1; z_1)$ һәм $B(x_2; y_2; z_2)$ нокталары $A_1(2x_1; 2y_1; 2z_1)$ һәм $B_1(2x_2; 2y_2; 2z_2)$ нокталарына чагылдырыла. Нокталар арасындагы ераклыкны исәпләүнең координаталар формуласын кулланып, $AB \neq A_1B_1$ икәнен табабыз. Бу исә бирелгән чагылдыруның хәрәкәт түгел икәнлеген күрсәтә.

6 *вар*. Мәсьәләләр 5 вариант мәсьәләләре кебек чишелә.

Җ а в а п. **1.** (0; 10; 20). **2.** Әйе, булыр.

7 *вар*. **1.** Турыпочмаклы координаталар системасын күрсәтегез, ягъни m_1 һәм m_2 турыларын Ox һәм Oy күчәрләре дип алабыз. Ox күчәренә карата симметрия вакытында $A(x; y; z) \to B(x; -y; -z)$, ә Oy күчәренә карата симметрия вакытында $B(x; -y; -z) \to C(-x; -y; z)$. Бу очракта A һәм C нокталары Ox һәм Oy ка перпендикуляр урнашкан Oz күчәренә карата симметрияле була.

2. Әйе, була. Мондый нокта координаталар башлангычына карата үзәк симметрия һәм $\vec{p}\{2; -3; 1\}$ векторына параллель күчерүнең композициясе ярдәмендә табыла.

8 *вар*. **1.** A га карата симметрия вакытында $M \to M_1$, B га карата симметрия вакытында $M_1 \to M_2$, ә C га карата симметрия вакытында $M_2 \to M_3$. Пространстволы $MM_1M_2M_3$ дүртпочмагы барлыкка килә.

M һәм M_3 нокталары MM_3нең уртасы D га карата симметрияле. A, B, C һәм D нокталары — күрсәтелгән дүртпочмак якларының эзлекле килүче урталары. Ул вакытта $ABCD$ ның параллелограмм икәне җиңел исбатлана.

2. Әйе, була. Мондый нокта Oxz яссылыгына карата көзгедәгечә симметрия һәм $\vec{p}\{-1; 2; 1\}$ векторына параллель күчерүнең композициясе буларак табыла.

М—6

1 *вар.* **1.** Ниндидер α яссылыгына перпендикуляр булган a турысын һәм α яссылыгындагы кисешүче b һәм c турыларын тикшерик. $a \perp b$ һәм $a \perp c$ икәне ачык күренә. Хәрәкәт нәтиҗәсендә $a \to a_1$, $b \to b_1$, $c \to c_1$, $\alpha \to \alpha_1$ булсын, c_1 һәм b_1 нокталарының α_1 яссылыгында ятуын, ә a_1 турысының α_1 яссылыгын кисеп үтүен исбатлау кыен түгел. Хәрәкәт вакытында почмаклар саклангалыктан, $a_1 \perp b_1$ һәм $a_1 \perp c_1$. Димәк, $a_1 \perp \alpha_1$, ягъни яссылыкка перпендикуляр туры хәрәкәт нәтиҗәсендә яссылыкка перпендикуляр булган турыга чагыла.

2. Әгәр ике параллель турының берсе α яссылыгын кисеп үтсә, икенчесе дә яссылык белән кисешә. Бирелгән a һәм b турылары бирелгән α яссылыгын A һәм B нокталарында кисеп үтсен. Димәк, $\overrightarrow{AB}$ векторына параллель күчергәндә, $a \to b$; $\alpha \to \alpha_1$. Ул вакытта, а пунктындагы исбатлау буенча, b турысы α яссылыгына перпендикуляр була.

2 *вар.* Күрсәтмә. Мәсьәләләр 1 вариант мәсьәләләре кебек чишелә.

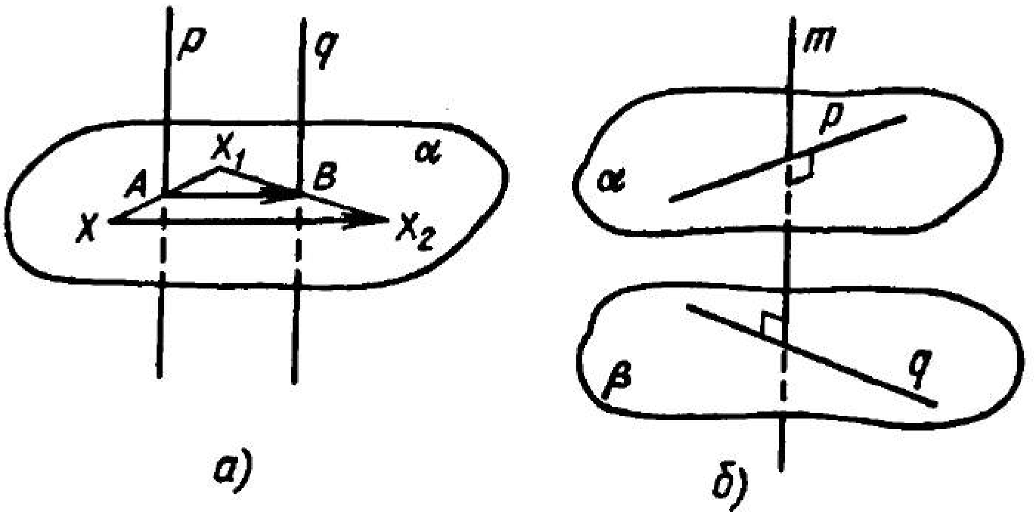
3 *вар.* 1) Биеклеге EO булган дүртпочмаклы төзек $EABCD$ пирамидасы бирелгән булсын. EO турысына карата симметрия вакытында $E \to E$, $A \to C$, $C \to A$, $B \to D$, $D \to B$. Димәк, $ABCD$ квадраты үз-үзенә чагылдырыла. Шулай булгач, EO — пирамиданың симметрия күчәре.

2) H ноктасы — пирамиданың ирекле алынган ноктасы булсын. Пирамиданың EOH яссылыгы белән кисемен тикшерик. Аның өчпочмак булуы ачык күренә. 1 пунктында исбатланганча, EO турысына карата симметрия вакытында H ноктасы пирамидада яткан H_1 ноктасына чагылдырыла. Шул ук вакытта, H_1 ноктасының EOH яссылыгында, ягъни кисемдә ятуы да үзеннән үзе аңлашыла. Бу исә түбәләренең берсе аша үтүче EO турысына карата симметрия вакытында кисемдә барлыкка килгән өчпочмак үз-үзенә чагылдырыла дигән сүз. Димәк, әлеге өчпочмак — тигезьянлы.

4 *вар.* Күрсәтмә. Мәсьәләләр 3 вариант мәсьәләләре кебек чишелә.

5 *вар.* 1) Күрсәтмә. Мәсьәлә 3 вариантның 1 мәсьәләсе кебек чишелә.

2) Төзек тетраэдрдагы капма-каршы кабыргаларның урталары кергән c турысы аша α яссылыгын үткәрәбез. M ноктасы тетраэдр белән α яссылыгы кисемендә ятсын. 1 мәсьәләдә исбатланганча, c

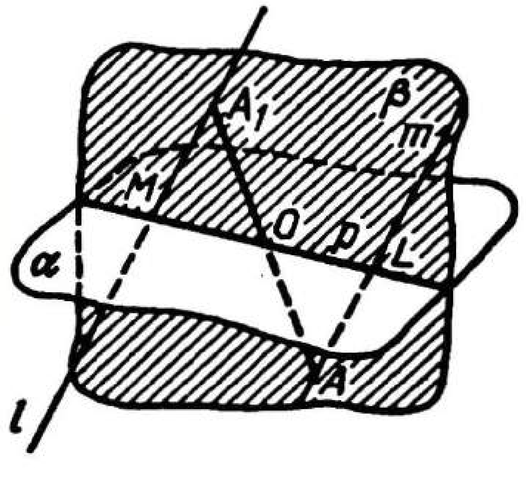


Рәс. 9

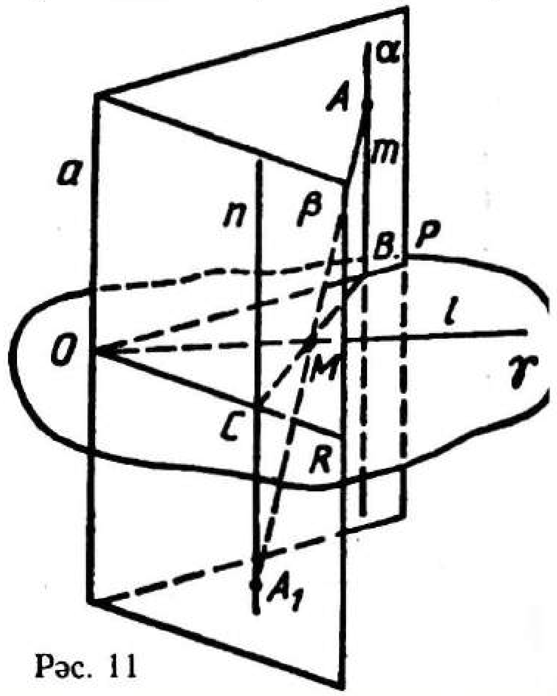
турысына карата симметрия вакытында, M ноктасы бер үк вакытта α яссылыгында да, тетраэдрда да ятучы M_1 ноктасына чагылдырыла. Димәк, турыга карата симметрия вакытында кисем үз-үзенә чагылдырыла. Хәзер α яссылыгы тетраэдрны бүлгәч барлыкка килгән кисәкләрнең берсендә ятучы ирекле H ноктасын алыйк. 1 пунктта исбатланганча, c турысына карата симметрия вакытында, H ноктасы тетраэдрда ятучы H_1 ноктасына чагылдырыла. Симметрияле нокталарның билгеләмәсе буенча, HH_1 кисемтәсе c турысын, димәк, α яссылыгын да кисә. Шулай булгач, H һәм H_1 — тетраэдрның икесе ике өлешендә яталар. Димәк, бу өлешләр c турысына карата симметрия вакытында бер-берсенә чагылдырылалар. Моннан, α яссылыгының тетраэдрны ике тигез өлешкә бүлүе килеп чыга.

6 *вар*. Күрсәтмә. Мәсьәлә 5 вариант мәсьәләләре кебек чишелә.

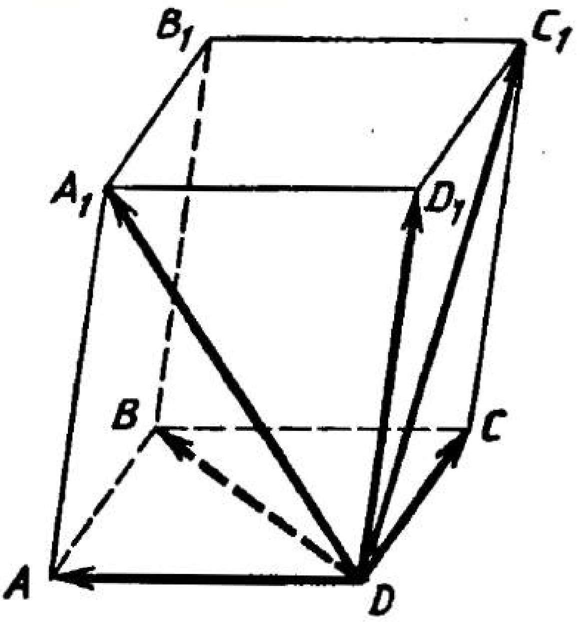
7 *вар*. **1.** $p \| q$ булсын (рәс. 9, *а*). p һәм q күчәрләренә карата эзлекле симметрияләр композициясе булып, $2\overrightarrow{AB}$ векторына параллель күчерү тора, ул X ноктасын X_2 ноктасына чагылдыра. Ә q һәм p күчәрләренә карата эзлекле симметрияләр композициясе булып,



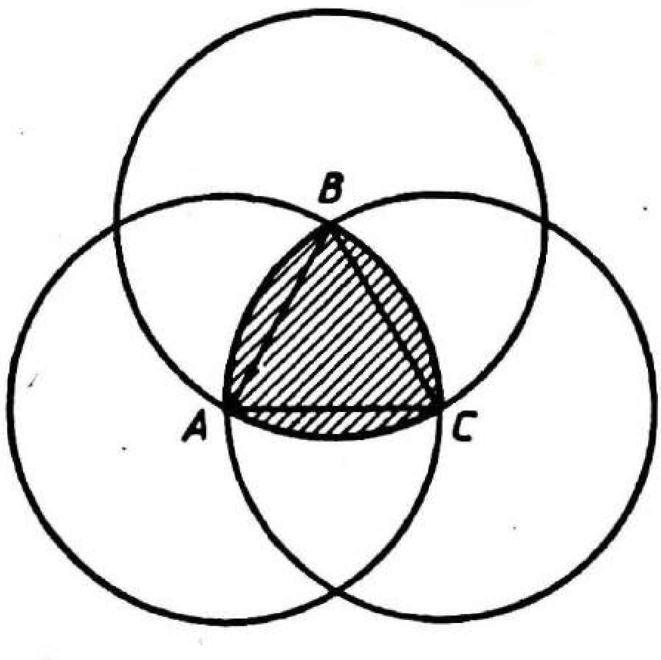
Рәс. 10



Рәс. 11



Рәс. 12



Рәс. 13

$2\overrightarrow{BA}$ векторына параллель күчерү тора, ул X_2 ноктасын X ноктасына чагылдыра. $2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BA}$ тигезлегеннән $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ икәнлеге килеп чыга, бу исә шартка каршы килә. Хәзер p һәм q турыларын чалышма турылар дип алыйк (рәс. 9, *б*). Бу очракта $S_q \circ S_p$ p һәм q турыларының уртак перпендикулярын үз-үзенә чагылдыра, m турысының бу чагылдыруы $\vec{c} \neq \vec{0}$ га күчерү була, ләкин бу — $S_p \circ S_q \neq S_q \circ S_p$ дигән сүз, ягъни шартка каршы килә. Моннан p һәм q ның кисешүче турылар икәне килеп чыга.

2. A ноктасы һәм l турысы аша α яссылыгын p турысы буенча кисә торган β яссылыгын үткәрәбез. β яссылыгында l турысына параллель итеп m турысын төзибез. Бу туры p ны L ноктасында кисеп үтсен. ML кисемтәсенең уртасы булган O ноктасы һәм A ноктасы аша, l турысы белән A_1 ноктасында кисешкәнче, туры үткәрәбез. A_1 ноктасының эзләнелгән нокта икәне җиңел исбатлана.

8 *вар*. **1.** 11 рәсемдә POR ноктасы — $\alpha a \beta$ икекырлы почмагының сызыкча почмагы, ә l — аның биссектрисасы. α кырында теләсә нинди A ноктасы сайлап алыйк һәм l күчәренә карата күчәр симметриясе вакытында аның β кырында ятучы ноктага чагылдырылуын исбатлыйк. Моның өчен A ноктасы аша, a кабыргасына параллель һәм l га перпендикуляр итеп, яссылык үткәрәбез. Бу яссылык α һәм β кырларын — m һәм n параллель турылары буенча, ә сызыкча почмак яссылыгы γ ны CB турысы буенча кисеп үтә. CB l ны M ноктасында кисеп үтә. A һәм M нокталары аша β кырын A_1 ноктасында кисеп үткәнче туры үткәрәбез. Бу вакытта $l \perp AA_1$ һәм $A_1M = MA$ икәнлеге җиңел исбатлана. A һәм A_1 нокталарының l күчәренә карата симметрияле икәнлеген исбатлыйбыз. Шул ук юл белән α кырындагы һәр ноктаның p кырында симметрияле ноктасы булуын исбатларга мөмкин һәм киресенчә. Димәк, l күчәренә карата симметрия вакытында, $\alpha a \beta$ икекырлы почмагы үз-үзенә чагылдырыла. Шулай итеп, l — икекырлы почмакның симметрия үзәге.

2. 12 рәсемдә $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{DC_1}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}=$

$= 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DD_1} = 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1}) = 2\overrightarrow{DB_1}$. Бу исә, B_1 ноктасының DB, DA_1 һәм DC_1 кисемтәләре белән төзелгән параллелепипед диагоналенең уртасы, ягъни параллелепипедның симметрия үзәге икәнлеген күрсәтә.

М—7

1 *вар.* **1.** $\frac{S\sqrt{3}}{2}$. **2.** 8π.

2 *вар.* **1.** $2Q$. **2.** 64π.

3 *вар.* **1.** $\operatorname{arctg}(\pi \operatorname{tg} \varphi)$. **2.** $12\pi\sqrt{3}$.

4 *вар.* **1.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pi}\right)$. **2.** 8π.

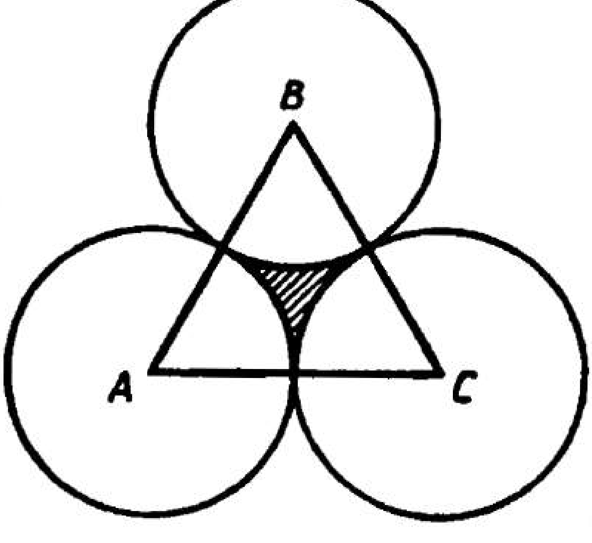
5 *вар.* **1.** $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

2. πa^2. Күрсәтмә. Ян өслек өч өлештән тора, алар барысы бергә биеклеге a га һәм нигез радиусы a га тигез булган цилиндрның ян өслеге мәйданының яртысын тәшкил итәләр (рәс. 13, өстән күренеше).

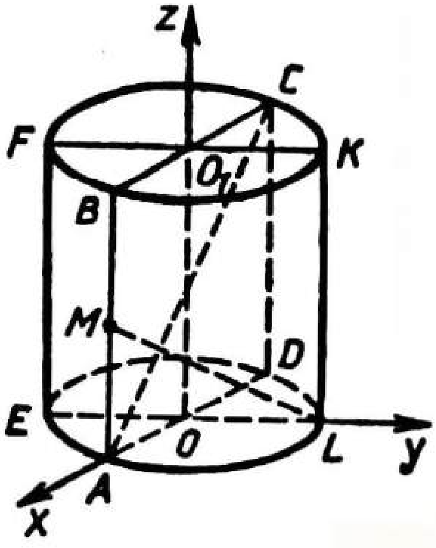
6 *вар.* **1.** 42.

2. $\frac{\pi a^2}{2}$. Күрсәтмә. Ян өслек өч өлештән тора, алар бергәләп, биеклеге a га һәм нигез радиусы $\frac{a}{2}$ га тигез булган цилиндрның ян өслеге мәйданының яртысын тәшкил итә (рәс. 14, өстән күренеше).

7 *вар.* **1.** Цилиндрны турыпочмаклы координаталар системасына 15 рәсемдә күрсәтелгәнчә итеп урнаштырабыз. R — нигезнең радиусы, ә h цилиндрның биеклеге булсын. Ул вакытта $A(R;\ 0;\ 0)$, $C(-R;\ 0;\ h)$, $M(R;\ 0;\ \frac{h}{2})$, $L(0;\ R;\ 0)$. $\overrightarrow{AC}\{-2R;\ 0;\ h\}$, $\overrightarrow{ML}\{-R;\ R;\ -\frac{h}{2}\}$. $AC \perp ML$ булганлыктан, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ML} = 0$, ягъни $2R^2 - \frac{h^2}{2} = 0$. Шуның



Рәс. 14



Рәс. 15

өстенә, $2Rh=4$ һәм $h=\frac{2}{R}$. Ул вакытта $2R^2-\frac{2}{R^2}=0$, $R=1$, $h=2$, $S=4\pi+2\pi\cdot 1=6\pi$.

Җавап. 6π.

2. 16 рәсемдә $EFKL$ — цилиндрның күчәр кисеме. Шарт буенча $KL=EL=2R$, $LR=\frac{a}{2}-R$, $\frac{KL}{LP}=\operatorname{tg}\varphi=2$, $\frac{2R}{\frac{a}{2}-R}=2$. Моннан $R=\frac{a}{4}$,

$S_{\text{ян}}=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2=4\pi\frac{a^2}{16}=\frac{\pi a^2}{4}$.

Җавап. $\frac{\pi a^2}{4}$.

8 *вар.* **1.** Цилиндрны турыпочмаклы координаталар системасына 15 рәсемдәгечә итеп урнаштырыйк. R — нигез радиусы, ә h — цилиндрның биеклеге, ул вакытта $N\left(\frac{R}{2};\ \frac{R}{2};\ 0\right)$, $M\left(\frac{R}{2};\ -\frac{R}{2};\ \frac{h}{2}\right)$ һәм $MN=\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4}}$.

Шарт буенча $\begin{cases} R^2+\frac{h^2}{4}=17 \\ 2Rh=16 \end{cases}$ һәм $\begin{cases} h=\frac{8}{R} \\ R^2+\frac{16}{R^2}=17, \end{cases}$

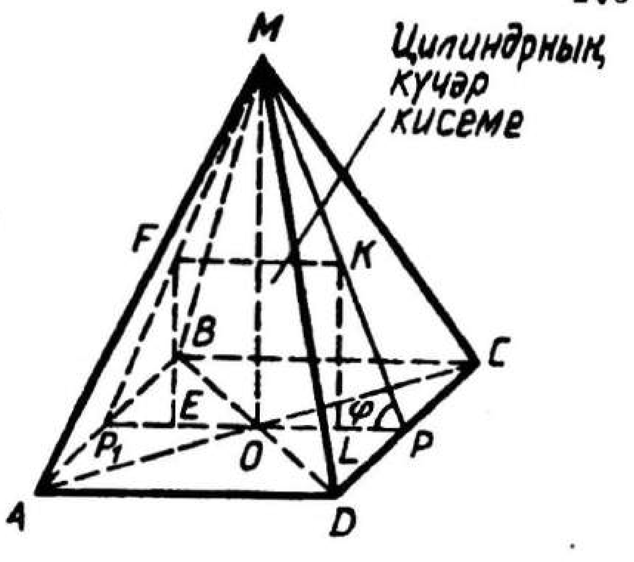
ягъни $R^4-17R^2+16=0$, моннан $R_1=1$; $R_2=4$. Димәк, $h_1=8$, $h_2=2$. Ул вакытта $S_1=16\pi+2\pi\cdot 1=18\pi$, $S_2=16\pi+2\pi\cdot 16=48\pi$.

Җавап. 18π яки 48π.

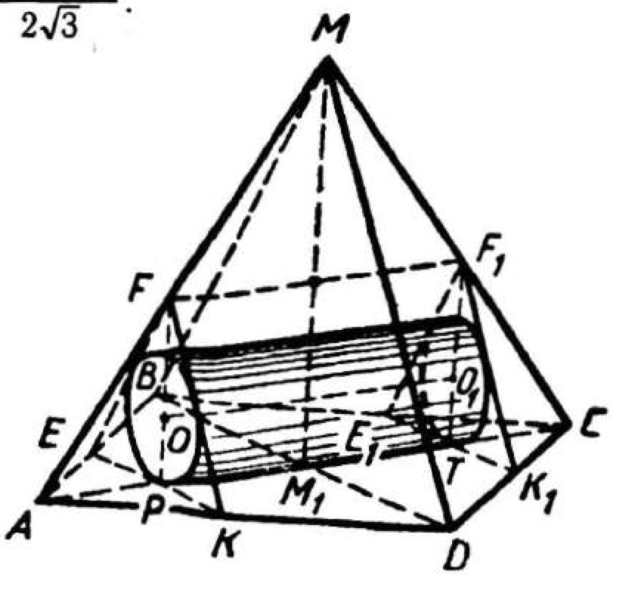
2. 17 рәсемдә күрсәтелгәнчә, цилиндр нигезләренең әйләнәләре EFK һәм $E_1F_1K_1$ төзек өчпочмаклары эченә камалган. Бу цилиндр нигезләренең яссылыклары диагональ кисем яссылыгы BMD га параллель, ә диагональ кисемнең, шарт буенча, төзек өчпочмак булуыннан килеп чыга; $AC=a\sqrt{2}$; $AR=\frac{a\sqrt{2}-h}{2}$; $EK=2AP=a\sqrt{2}-h$.

Цилиндр нигезенең радиусы

$$r=\frac{EK}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{2}-h}{2\sqrt{3}}.$$



Рәс. 16



Рәс. 17

$$S_{\text{ян.}} = 2\pi r h = 2\pi\frac{a\sqrt{2}-h}{2\sqrt{3}} \cdot h = \frac{\pi h}{\sqrt{3}}(a\sqrt{2} - h).$$

Җ а в а п. $\frac{\pi h}{\sqrt{3}}(a\sqrt{2} - h)$.

М—8

1 *вар*. **1.** πa^2. **2.** 64π.

2 *вар*. **1.** $\frac{\pi m^2\sqrt{3}}{4}$. **2.** 2 һәм 14.

3 *вар*. **1**. $8\sqrt{2}$. **2.** $\pi L^2\sin\alpha\, \text{tg}\alpha$.

4 *вар*. **1.** 150π. **2.** $\frac{\pi m^2 \text{ctg}\varphi}{\sin\varphi}$.

5 *вар*. **1.** Әгәр конусның төзүчеләре арасындагы почмак җәенке булса, иң зур мәйдан — үзара перпендикуляр төзүчеләр белән төзелгән кисемнеке, ә почмак кысынкы яки туры булса, күчәр кисеменеке була. Әгәр α җәелмәнең үзәк почмагы булса, $\alpha = \frac{R}{L} \cdot 360$, һәм ул чагында $\frac{R}{L} = \frac{3}{4}$, була. φ — төзүчеләр арасындагы иң зур почмак булсын һәм $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Моннан $45° < \frac{\varphi}{2} < 90°$, ягъни $90° < \varphi < 180°$. Димәк, иң зур мәйданны үзара перпендикуляр төзүчеләр белән төзелгән почмак били. Әгәр β эзләнелгән почмак булса, $\sin\beta = \frac{H}{h}$, биредә H — конусның биеклеге, ә h — кисем биеклеге.

$$H = \sqrt{L^2 - \frac{9}{16}L^2} = \frac{L\sqrt{7}}{4};\ h = \frac{L\sqrt{2}}{2}.$$

Бу вакытта

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{14}}{4} \text{ һәм } \beta = \arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Җ а в а п. $\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}$.

2. 60°.

6 *вар*. **1**. 90°. К у р с ә т м ә. Мәсьәлә 5 варианттагы 1 мәсьәлә кебек чишелә, ләкин бу очракта иң зур мәйданны күчәр кисеме алып тора.

2. 60°.

7 *вар*. **1.** Конусның нигезе $z = -2$ яссылыгында ята.

$M(x; y; -2)$ — нигез әйләнәсенең үзәге булсын, $MA = MB = MC$.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}.$$

Моннан $\begin{cases} -2x-4y+5=-8x-4y+20 \\ -2x-4y+5=-6x-8y+25 \end{cases}$

икәнлеге килеп чыга, ягъни $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{5}{2}$, $z=-2$. Конус түбәсенең координаталары $M(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 1)$. Нигез радиусы:

$$R=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Төзүчесе:

$$L=\sqrt{\frac{10}{4}+9}=\frac{\sqrt{46}}{2}.$$

$$S_{\text{ян.}}=\pi RL=\pi\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{46}}{2}=\frac{\pi\sqrt{115}}{2}.$$

Кисем конусның биеклеген 1 : 3 чагыштырмасында бүлә.

$$S_{\text{ниг.}}=\frac{5\pi}{2} \text{ һәм } S_{\text{кис.}}=\frac{1}{9}\cdot S_{\text{ниг.}}=\frac{5\pi}{18}.$$

Җавап. $S_{\text{кис.}}=\frac{5\pi}{18}$, түбәнең координаталары $M(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 1)$, $S_{\text{ян.}}=\frac{\pi\sqrt{115}}{2}$.

2. $ABCD$ — конусның күчәр киселеме булсын, биредә $AC\perp BD$ һәм BK — конусның биеклеге. $BK=KD$, $KD=R+r$ икәнен исбатлау җиңел, биредә R һәм r — нигез радиуслары. L — конусның төзүчесе һәм аның белән нигез яссылыгы арасындагы почмак φ гә тигез булсын. Моннан $BK=KD=L\cdot\sin\varphi$. Бу очракта $R+r=L\cdot\sin\varphi$ һәм $S_{\text{ян.к.кон}}=\pi L^2\cdot\sin\varphi$. Икенче конусның ян өслеге мәйданы:

$$\pi\cdot BK\cdot BD=\pi L\cdot\sin\varphi\cdot L\sqrt{2}\sin\varphi=\pi L^2\sqrt{2}\sin^2\varphi.$$

Шарт буенча $\frac{\pi L^2\sin\varphi}{\pi L^2\sqrt{2}\sin^2\varphi}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Моннан $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ һәм $\varphi=60^\circ$.

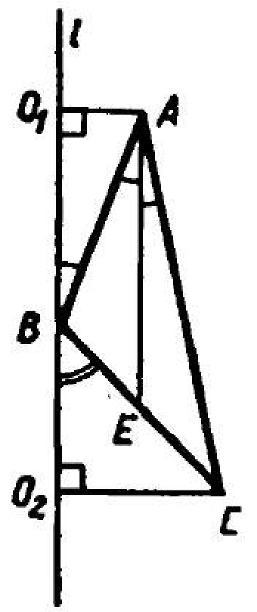
Җавап. 60°.

8 *вар.* **1.** $\frac{65\pi}{4}$. Күрсәтмә. ABC өчпочмагының турыпочмаклы һәм конус нигезе радиусының $\frac{5}{2}$ икәнен исәпкә алырга кирәк.

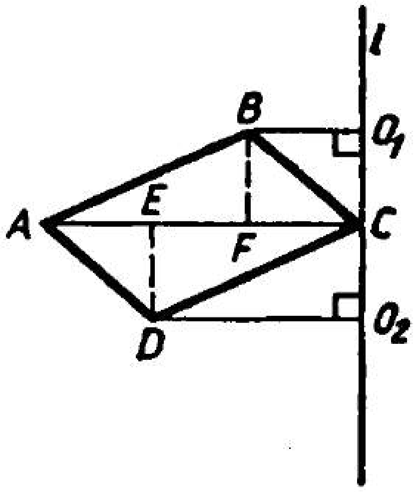
2. 60°.

М—9

1 *вар.* **1.** $\frac{84\pi}{5}$. **2.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{12}$.



Рәс. 18



Рәс. 19

2 *вар*. **1.** 16π. **2.** $\frac{2\pi a^2\sqrt{3}}{9}$.

3 *вар*. **1.** $\pi a^2(3+\sqrt{2})$. **2.** $\frac{\pi a^2}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\beta}$.

4 *вар*. **1.** 96π. **2.** $\frac{\pi a^2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\varphi}$.

5 *вар*. **1.** Күчәр тирәсендә a кисемтәсен әйләндерүдән килеп чыккан өслекнең мәйданын S_a дип билгелибез. Ул вакытта

$S_{\text{әйл. ж.}}=\pi\cdot AC(AO_1+CO_2)+\pi a\cdot AO_1+\pi a\cdot CO_2=\pi(AO_1+CO_2)(AC+a)$ (рәс. 18.)

$$\angle BAC=\angle BCA=30^\circ;\ \angle BAE=\angle O_1BC=15^\circ;\ \angle O_2BC=45^\circ;$$

$$AC=a\sqrt{3};\ AO_1=\alpha\sin 15^\circ;\ CO_2=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Моннан

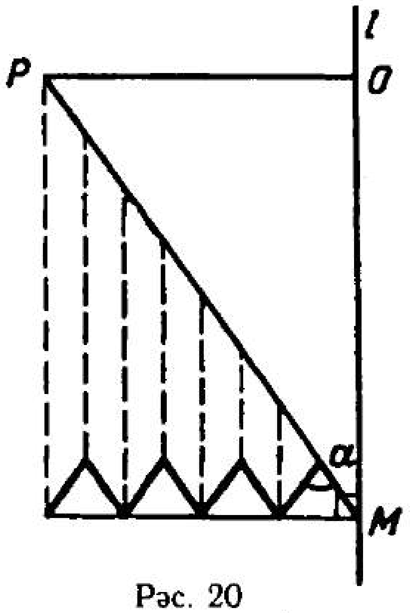
$$S=\pi a^2\left(\sin 15^\circ+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{3}+1).$$

Җавап. $\pi a^2\left(\sin 15^\circ+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{3}+1)$.

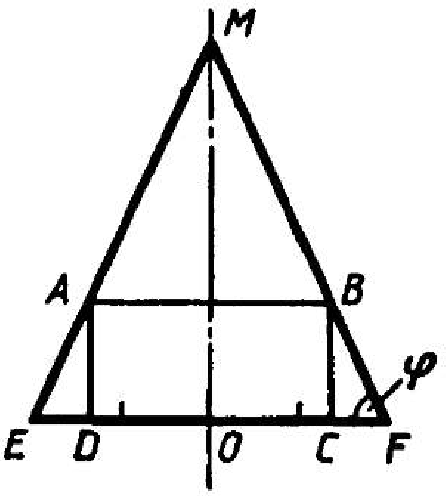
2. $S=\frac{m^2ctg\,\varphi\cdot\cos\frac{\pi}{5}}{1+ctg^2\,\varphi\cdot\cos^2\frac{\pi}{5}}$.

6 *вар*. **1.** $S_{\text{әйл. ж.}}=\pi BC\cdot BO_1+\pi\cdot AB(AC+BO_1)+\pi\cdot AD(AC+DO_2)+$ $+\pi DC\cdot DO_2$. $AB=CD$ һәм $BC=AD$ булганлыктан (рәс. 19),

$S=\pi\cdot BC\cdot BO_1+\pi\cdot AB(AC+BO_1)+\pi\cdot BC(AC+DO_2)+\pi\cdot AB\cdot DO_2=$



Рәс. 20



Рәс. 21

$$= \pi \cdot BC(BO_1 + DO_2 + AC) + \pi \cdot AB(BO_1 + DO_2 + AC) =$$
$$= \pi(AB + BC)(BO_1 + DO_2 + AC); \; AB + BC = \frac{P}{2}; \; BO_2 + DO_2 = AC.$$

Ул вакытта

$$S = \pi\frac{P}{2} \cdot 2 \cdot AC = \pi Pd.$$

Җавап. πPd.

2. $\frac{L^2 \text{ctg}\varphi \cdot \cos\frac{\pi}{5}}{\text{ctg}^2\varphi + \cos^2\frac{\pi}{5}}$.

7 вар. **1.** Сынык сызыкны l күчәре тирәсендә әйләндерү нәтиҗәсендә килеп чыккан өслек мәйданының MP кисемтәсен шушы ук күчәр тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан өслек мәйданына тигез икәнлеген исбатларга мөмкин.

$$MP = 8a; \; \angle PMO = \frac{\alpha}{2}; \; PO = 8a \sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\text{әйл.ж.}} = \pi \cdot PO \cdot PM = \pi \cdot 8a \cdot 8a \sin\frac{\alpha}{2} = 64\pi a^2 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Җавап. $64\pi a^2 \sin\frac{\alpha}{2}$.

2. 21 рәсемдә конусның күчәр кисеме күрсәтелгән; $OC = \frac{a}{2}$; BC — призма нигезендә яткан төзек өчмочмакның биеклеге; $BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Конус нигезенең радиусы $R = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\text{ctg}\varphi$. Конусның биеклеге $H = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}\,\text{ctg}\varphi) \cdot \text{tg}\varphi$.

$$S_{\text{күч.к.}} = RH = \frac{a^2}{\frac{4}{3}}(1 + \sqrt{3}\,\text{ctg}\varphi)^2 \cdot \text{tg}\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\text{tg}\varphi + \frac{3}{\text{tg}\varphi} + 2\sqrt{3}\right);$$

$$\operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{\operatorname{tg}\varphi} = \sqrt{3}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\varphi}\right) \geq 2\sqrt{3}.$$

$S_{\min} = a^2\sqrt{3}$. Мона $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, ягъни $\varphi = 60^\circ$ булганда ирешелә.

Җавап. $S = \frac{a^2}{4}\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{\operatorname{tg}\varphi} + 2\sqrt{3}\right)$; $S_{\min} = a^2\sqrt{3}$; $\varphi = 60^\circ$.

8 *вар.* **1.** $36\pi a^2\sqrt{2}$.

2. $S = \frac{a^2}{3}\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{3}{\operatorname{tg}\varphi} + 2\sqrt{3}\right)$; $S_{\min} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$; $\varphi = 60^\circ$

Мәсьәлә 7 вариант мәсьәләләре кебек чишелә.

М—10

1 *вар.* **1.** а) $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 16$; б) әйе; юк.
2. 13.
2 *вар.* **1.** а) $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9$. б) юк; әйе.
2. 13.
3 *вар.* **1.** $(x-1)^2 + y^2 + (z-\sqrt{3})^2 = 4$ яки $(x-1)^2+y^2+(z+\sqrt{3})^2 = 4$.
2. $\frac{a\sqrt{2\cos 2\alpha}}{4}$.
4 *вар.* **1.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ яки $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$.
2. $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

5 *вар.* **1.** $z = 0$ икәнлеге ачык. $M(x;\ y;\ z)$ — эзләнелә торган кисешү ноктасы булсын. Ул AB турысында ята. Бу — $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ дигән сүз.

$$\overrightarrow{AM}\left\{x-\sqrt{2};\ y-\sqrt{2};\ z\right\};\ \overrightarrow{AB}\left\{-2\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\};$$

$$\begin{cases} x-\sqrt{2} = -2k\sqrt{2} \\ y-\sqrt{2} = k\sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2k\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ y = k\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2}. \end{cases}$$

Икенче яктан караганда, бу нокта сферада ята. Ул вакытта

$$(\sqrt{2}(1-2k))^2 + (\sqrt{2}(k+1))^2 + (k\sqrt{2})^2 = 4.$$

Моннан

$$6k^2 - 2k = 0;\ k_1 = 0;\ k_2 = 3.$$

Димәк, $x_1 = -5\sqrt{2}$, $\quad x_2 = \sqrt{2}$,
$y_1 = 4\sqrt{2}$, $\quad y_2 = \sqrt{2}$,
$z_1 = 3\sqrt{2}$. $\quad z^2 = 0$.

Җавап. $(-5\sqrt{2};\ 4\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$ һәм $(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 0)$.

2. $O_1(0;\ 0;\ \frac{1}{2})$ — сфераның үзәге һәм сфераның радиусы $\frac{7}{13}$ икәнен искәртик. Координаталар башлангычыннан AB га OK перпендикулярын төшерәбез, $OK = \frac{12}{5}$. C һәм K нокталарын тоташтырабыз. COK өчпочмагында CK га OM перпендикулярын төшерәбез. $CK = \sqrt{\frac{144}{25} + 1} = \frac{13}{5}$, $OM = \frac{12}{13}$ (OM — O ноктасыннан ABC яссылыгына кадәр ераклык. $O_1M_1 \perp CK$ ны үткәрәбез (O_1M_1 — сфера үзәге, O_1 дән ABC яссылыгына кадәр ераклык), $O_1M_1 = \frac{1}{2}OM = \frac{6}{13} < \frac{7}{13}$. Димәк, сфера һәм яссылыкның киселеше әйләнә була, аның радиусы:

$$r = \sqrt{\frac{49}{169} - \frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Бу әйләнәнең озынлыгы $C = \frac{2\pi\sqrt{13}}{13}$.

Җавап. Әйе, кисә; кисешү сызыгының озынлыгы $\frac{2\pi\sqrt{13}}{13}$.

6 *вар*. **1.** $\left(2;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(0;\ 3;\ -\frac{5}{2}\right)$.

2. Әгәр $R > \frac{2}{7}$ булса, сфера белән яссылык әйләнә буйлап кисешәләр. Әгәр $R = \frac{2}{7}$ булса, сфера белән яссылыкның бер генә уртак ноктасы була. Әгәр $R < \frac{2}{7}$ булса, сфера белән яссылыкның уртак нокталары булмый. Күрсәтмә. Мәсьәләләр 5 вариант мәсьәләләре кебек чишелә.

7 *вар*. **1.** Бирелгән сфераларның тигезләмәләрен каноник рәвешкә китереп язабыз:

$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$ һәм $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Беренче сфераның үзәге $O_1(1;\ 0;\ -1)$ ноктасында, ә икенчесенең $O_2(-1;\ 1;\ 1)$ ноктасында була. Сфераларның радиуслары $R_1 = 2$, $R_2 = 3$. Үзәкләр арасындагы ераклык $O_1O_2 = \sqrt{4+1+4} = 3$, $R_2 - R_1 < O_1O_2 < R_1 + R_2$. Димәк, сфералар кисешәләр. A — сфераларның уртак ноктасы булсын. Ул вакытта O_1AO_2 өчпочмагының биеклеге h бу сфералар кисешү сызыгының радиусы була һәм $O_1O_2 = 3$, $O_1A = 2$, $O_2A = 3$. $S_{O_1AO_2} = 2\sqrt{2}$, $h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Ул вакытта әйләнә озынлыгы $C = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

Җавап. $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

2. $M(x;\ y;\ z)$ эзләнелә торган күплеккә керә.

$MA = \sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}$; $MB = \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$; $2MA = MB$;

$$2\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2};$$

$$4(x-2)^2+4y^2+4z^2=(x+4)^2+y^2+z^2.$$

Моннан $(x-4)^2+y^2+z^2=16$.

Җ а в а п. $(x-4)^2+y^2+z^2=16$ сферасы — эзләнелә торган күплек.

8 *вар.* **1**. $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=22$.

2. $x^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+z^2=\frac{16}{9}$. К ү р с ә т м ә. Мәсьәлә 7 вариант мәсьәләсе кебек чишелә.

М—11

1 *вар.* **1.** 400π. **2.** 6π.
2 *вар.* **1.** 676π. **2.** 4π.
3 *вар.* **1.** 676π. **2.** $4\sqrt{2}$.
4 *вар.* **1.** 676π. **2.** 36π, 36π.
5 *вар.* **1.** $8\sqrt{2}$.

2. Эзләнелә торган ераклыкны x дип билгелибез. Ул вакытта балдакның зуррак әйләнәсе радиусы — $\sqrt{R^2-x^2}$ ка, кечерәк әйләнәсенең радиусы $R-x$ ка тигез. Бу күчәр кисеменең тигезьянлы турыпочмаклы өчпочмак булуыннан килеп чыга. $S_6=\pi(R^2-x^2-(R-x)^2)=2\pi(-x^2+Rx)$. Бу функциянең иң зур кыйммәте $x=\frac{R}{2}$ булганда икәнлеген исбатлау җиңел.

Җ а в а п. $\frac{R}{2}$.

6 *вар.* **1.** 4 һәм 5.

2. Эзләнелә торган ераклыкны x дип билгелибез. Ул вакытта цилиндр нигезенең радиусы $R^2 - x^2$ ка тигез. Цилиндрның ян өслеге мәйданы:

$$S=2\pi x\sqrt{R^2-x^2}=2\pi\sqrt{R^2x^2-x^4}.$$

$p(x)=R^2x^2-x^4$ функциясен тикшеребез, биредә $0<x<R$. Бу функция, димәк, цилиндрның ян өслеге мәйданы да $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$ булганда, иң зур кыйммәтен ала.

Җ а в а п. $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

7 *вар.* **1.** MA, MB һәм MC хордаларынын очлары шар өслегендә ята һәм ABC төзек өчпочмагының түбәләре булып торалар. Төзек $MABC$ пирамидасы барлыкка килә. MO_1 — бу пирамиданың биеклеге булсын. Ул вакытта шарның үзәге O MA кабыргасына урта перпендикуляр KO ның кисешү ноктасында ята (K — AM ның

уртасы). $\Delta KOM \backsim \Delta MO_1A$ икәнлеген исбатлау җиңел. Моннан $R_ш = MO = \frac{AM^2}{2MO_1}$. Хорданың озынлыгы a га тигез. Ул вакытта

$$AC = 2a\sin\frac{\alpha}{2} \text{ һәм } AO_1 = \frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$MO_1 = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$R = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Моннан

$$a = \frac{2R\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{1 + 2\cos\alpha}}{\sqrt{3}}.$$

Җавап. $\frac{2R\sqrt{1 + 2\cos\alpha}}{\sqrt{3}}$.

2. $\pi(a^2 + b^2 + c^2)$. Күрсәтмә. Сфераларның диаметры булып, бу хордалар ярдәмендә төзелгән параллелепипедның диагонале тора.

8 *вар*. **1.** Кабыргасы $2R$ га тигез булган төзек тетраэдрның түбәләре бу шарларның үзәкләре була. Эзләнелә торган сфераның үзәге бу тетраэдрның үзәге белән тәңгәл килә. Ул сфераның радиусы тетраэдр түбәсе яткан сфера радиусы белән шар радиусының аермасына тигез. Сфераның радиусын, мәсәлән, 7 вариантның 1 мәсьәләсендә күрсәтелгән юл белән табарга мөмкин. Аның радиусы $\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ гә тигез. Эзләнелә торган сфераның радиусы:

$$\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - R = \frac{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - 2).$$

Җавап. $\frac{R}{2}(\sqrt{6} - 2)$.

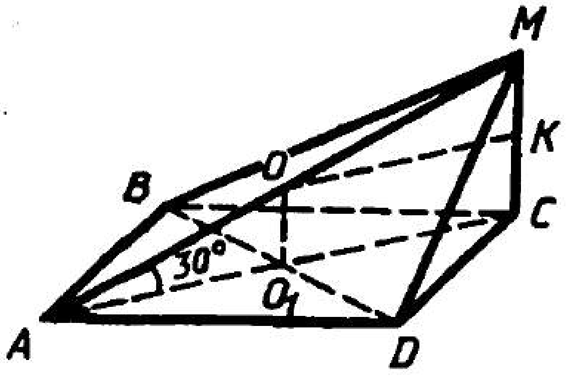
2. Тетраэдрдагы чалышма кабыргаларның озынлыклары суммасы үзара тигез. Күрсәтмә. Сферага бер үк ноктадан үткәрелгән орынма кисемтәләренең үзара тигезлеген кулланырга кирәк.

М—12

1 *вар*. **1.** 2. **2.** $\frac{6}{\pi}$

2 *вар*. **1.** $\frac{2}{3}$. **2.** 16π.

3 *вар*. **1.** $1\frac{1}{6}$. Күрсәтмә. Камаучы шарның үзәге нигез яссылыгыннан түбәнрәк ята. Камаучы шарның радиусын табу өчен, мәсәлән, $R_ш = \frac{L^2}{2H}$ формуласын кулланырга мөмкин, биредә L — пирамиданың ян кабыргасы озынлыгы, ә H — пирамиданың биеклеге.



Рәс. 22

2. $\operatorname{arctg}(\sin \frac{\alpha}{2})$.

4 *вар.* **1.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** 676π.

5 *вар.* **1.** 22 рәсемдә $MABCD$ пирамидасы сурәтләнгән, $ABCD$ — квадрат, $MC \perp ABC$. Камаучы шарның үзәге — AM кабыргасының уртасы булган O ноктасында (квадрат үзәге O_1 аша нигез яссылыгына үткәрелгән перпендикуляр белән MC кабыргасының урта перпендикуляры OK кисешкән ноктада). Квадратның ягы a га тигез булсын. Ул вакытта $AC = a\sqrt{2}$. Икенче яктан, $AC = 2R\cos 30° = R\sqrt{3}$, $a\sqrt{2} = R\sqrt{3}$.

Моннан $a = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $MC = a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg}30° = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $MD = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

$$S_{ян} = MC \cdot CD + MD \cdot AD = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{a^2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) =$$

$$= \frac{3R^2}{2\sqrt{3}}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$

Җ а в а п. $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2})$.

2. $\frac{1}{4}(a + b)^2\sqrt{3}$. К ү р с ә т м ә. Тикшерелә торган пирамиданың апофемасы аның нигезләренең апофемалары суммасына тигез.

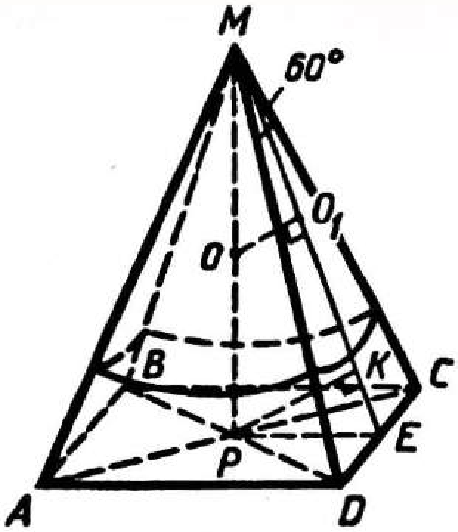
6 *вар.* **1.** $MABC$ — өчпочмаклы төзек пирамида булсын. $MO_1 \perp ABC$. O_1 ноктасыннан AC кабыргасына O_1K перпендикулярын төшерәбез, M һәм K нокталарын тоташтырабыз; $\angle MKO_1$ — ян кыр белән нигез яссылыгы ярдәмендә төзелгән икекырлы почмакның сызыкча почмагы. Шарның үзәге бу сызыкча почмак биссектрисасы KO белән пирамида биеклеге MO_1 кисешкән O ноктасында ята. Шарт буенча $\frac{OO_1}{OM} = \frac{1}{3}$. Өчпочмакта почмак биссектрисасы үзлекләреннән $\frac{KO_1}{KM} = \frac{1}{3}$ икәнлеге билгеле. Димәк, $\cos\angle MKO_1 = \frac{1}{3}$, $O_1K = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Ул вакытта

$$MK = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

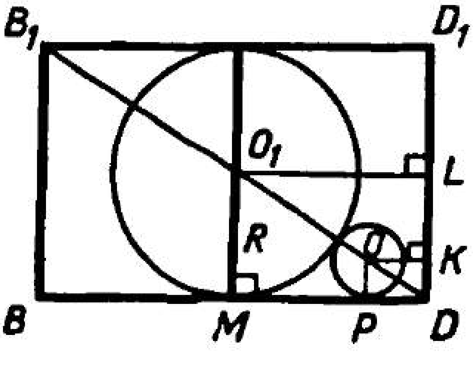
Ян кабырга $AM = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a$.

Җа в а п. a.

2. $4R^2\sqrt{2}$.



Рәс. 23



Рәс. 24

7 *вар*. **1.** Пирамиданың төзек пирамида икәнлеген исбатлау җиңел. Кисешү сызыгы сфера белән пирамида кырлары кисешкәндә барлыкка килгән әйләнәләрнең дүрт тигез дугасыннан тора (рәс. 23). Бу әйләнәләрнең радиусын табу өчен, шар үзәгеннән алып пирамида кырларына кадәр ераклыкны исәпләргә кирәк. Рәсемдә $PK \perp DMC$

һәм $OO_1 \perp DMC$, $OO_1 = \frac{1}{2}PK$, $PK = \frac{MP \cdot PE}{ME}$, $ME = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $PE = \frac{a}{2}$,

$MP = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $PK = \frac{a\sqrt{2}a \cdot 2}{2 \cdot 2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$, $OO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$.

Әйләнә радиусы

$$MO_1 = \sqrt{MO^2 - OO_1^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{16} - \frac{2a^2}{16 \cdot 3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Кисешү сызыгындагы һәрбер дуганың градуслардагы үлчәме 120° ка тигез.

Ул вакытта $l = \frac{\pi \cdot a \cdot 120}{2\sqrt{3}\,180} = \frac{\pi a}{3\sqrt{3}}$. Бу очракта кисешү сызыгының

озынлыгы $\frac{4\pi a}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}$ була.

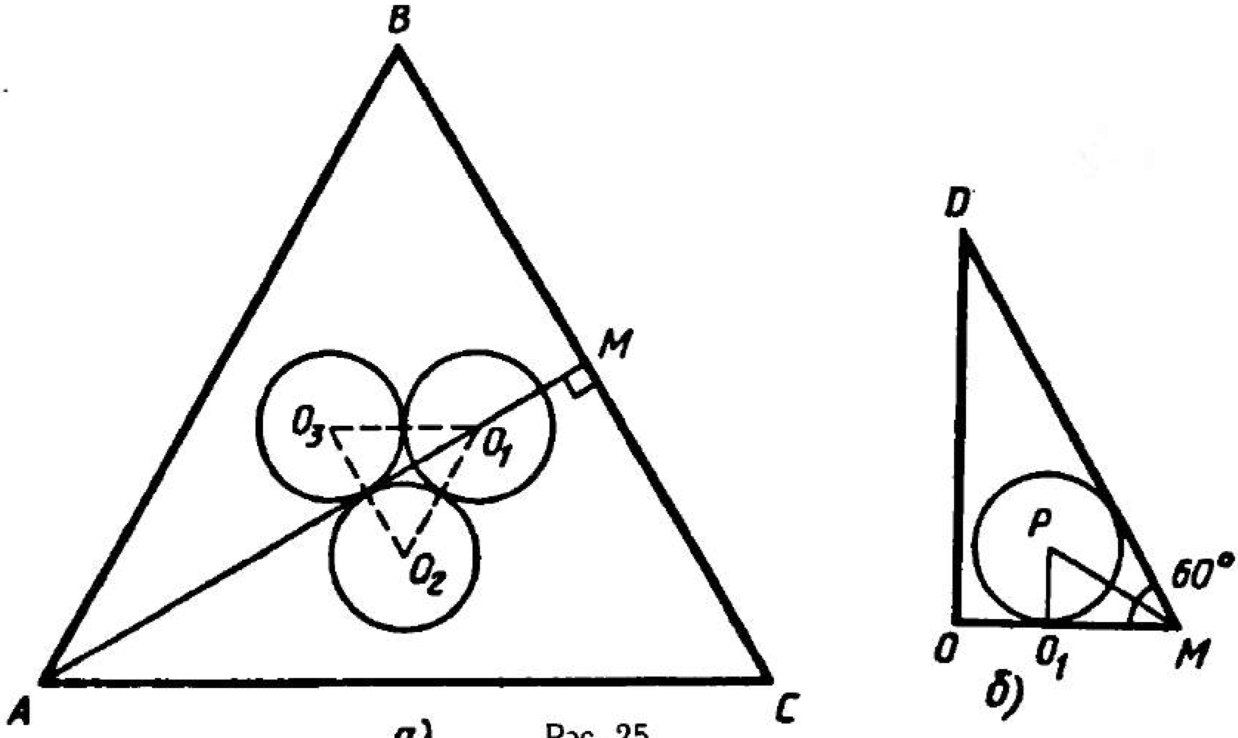
Җавап. $\frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}$.

2. 24 рәсемдә $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының BB_1D_1D диагональ кисеме камалган шарларның зур әйләнәләре белән бергә күрсәтелгән. $\Delta O_1LD \backsim \Delta OKD$. Кечерәк шарның радиусы x булсын. Ул вакытта

$$\frac{x}{R} = \frac{OK}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}, \quad R = \frac{a}{2}.$$

Моннан $OK = x\sqrt{2}$; OKD өчпочмагыннан $OD = \sqrt{2x^2 + x^2} = x\sqrt{3}$; кубның диагонале $B_1D = a\sqrt{3}$, $O_1D = x + R + x\sqrt{3}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2} = x + \frac{a}{2} + x\sqrt{3}$. Ул чагында

$$x = \frac{a\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3} + 1} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{3}).$$



Рәс. 25

Җавап. $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$.

8 *вар*. **1.** $\frac{9a}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Күрсәтмә. Мәсьәлә 7 вариантның 1 мәсьәләсе кебек чишелә. Пирамида түбәсе янындагы яссы почмак $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$ радианга тигез.

2. 25 *а* рәсемдә *DABC* пирамидасының өстән күренеше камалган шарларның сурәтләре белән бергә бирелә. 25, *б* рәсемендә *DOM* өчпочмагы сурәтләнә, биредә *DO* — пирамиданың биеклеге, *DM* — апофемасы. Үзәге *P* ноктасында булган әйләнә — шар белән *DAM* яссылыгы кисеменең сурәте. Радиус x ка тигез булсын. Ул вакытта $O_1M = x\operatorname{ctg} 30° = x\sqrt{3}$, $OM = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. $O_1O_2O_3$ өчпочмагы—ягы $2x$ ка тигез булган төзек өчпочмак;

$$OO_1 = \frac{2x}{\sqrt{3}},\ OM = O_1M + OO_1,\ \frac{a}{2\sqrt{3}} = x\sqrt{3} + \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

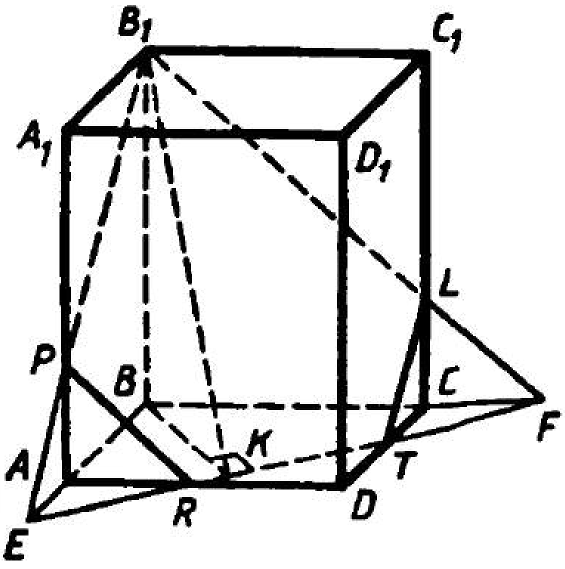
Моннан $x = \frac{a}{10}$.

Җавап. $\frac{a}{10}$.

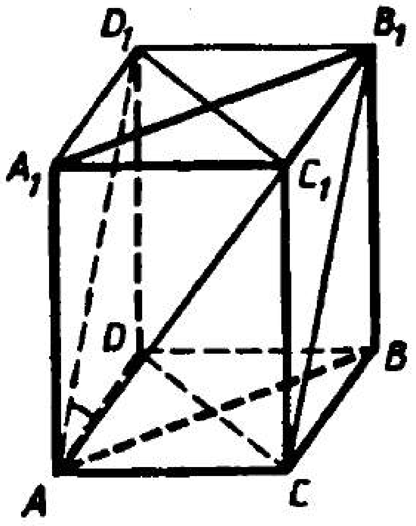
М—13

1 *вар*. **1.** 24. **2.** $144\sqrt{3}$.

2 *вар*. **1.** 32. **2.** $54\sqrt{3}$.



Рәс. 26



Рәс. 27

3 *вар.* **1.** $\frac{d^3\sqrt{2}}{8}$. **2.** $24\sqrt{3}$.

4 *вар.* **1.** $a^3\sqrt{2}$. **2.** 40.

5 *вар.* **1.** Нигез диагональләре O ноктасында кисешә дип уйлыйбыз. DBB_1 яссылыгында O ноктасы аша, DB_1 гә параллель итеп, BB_1 кабыргасы белән E ноктасында кисешкәнче туры үткәрәбез. Бу ноктаны A һәм C түбәләре белән тоташтырабыз. Эзләнелгән кисем — AEC кисеме булса, B ноктасыннан AC га BK перпендикуляры төшерәбез һәм K ноктасын E ноктасы белән тоташтырабыз; $\angle EKB = 45°$. $BE = BK = \frac{24}{5}$, $BB_1 = 2BE = \frac{48}{5}$, $V = 6 \cdot 8 \cdot \frac{48}{5} = 460{,}8$.

Җавап. 460,8.

2. $\frac{a^3\sqrt{2}\cos 2\alpha}{4\sin\alpha}$. Күрсәтмә. C түбәсеннән AB га CK перпендикулярын төшерергә кирәк. $CK \perp AA_1B_1$ икәнлеге җиңел исбатлана. Бу очракта $\angle CB_1K = \alpha$. Моннан соңгы чишелеш җиңел аңлашыла.

6 *вар.* **1.** $\frac{216\sqrt{5}}{5}$. **2.** $\frac{h^3 \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{2\cos^2\beta}$. Күрсәтмә. Мәсьәләләр 5 вариант мәсьәләләре кебек чишелә.

7 *вар.* **1.** 26 рәсемдә параллелепипед белән бирелгән яссылыкның кисеме күрсәтелгән. $BK \perp EK$, $\angle B_1KB = 45°$. R һәм T — AD һәм CD якларының урталары булганлыктан, $BE = 9$ һәм $BF = 12$ икәнлеге җиңел табыла. Бу очракта $EF = 15$ һәм $BK = \frac{BE \cdot BF}{EF} = \frac{36}{5}$, $BB_1 = \frac{36}{5}$,

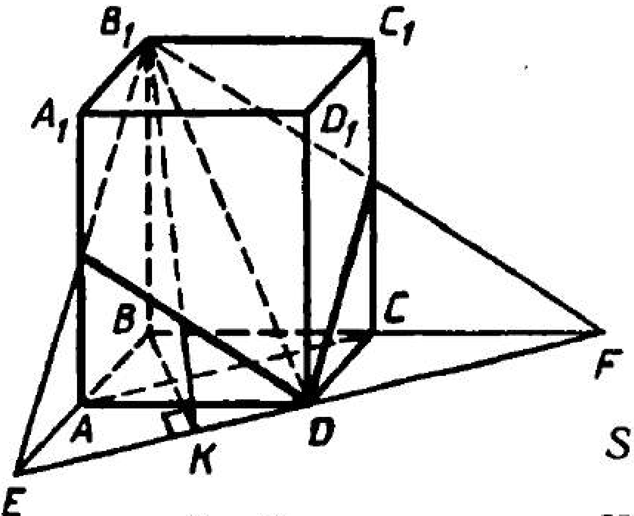
$V = 6 \cdot 8 \cdot \frac{36}{5} = 345{,}6$.

Җавап. 345,6.

2. Өчпочмаклы $ABCA_1B_1C_1$ призмасын турыпочмаклы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедына тутырабыз (рәс. 27). Бу вакытта AC_1 һәм B_1C арасындагы почмак D_1AC_1 почмагына тигез. Шарт

буенча $\angle D_1AC_1 = \arccos\frac{3\sqrt{2}}{10}$. Әгәр $AC = x$ дип алсак, $AC_1 = \sqrt{x^2+9}$, $DC = AB = \sqrt{x^2+16}$ һәм $AD_1 = 5$. Косинуслар теоремасы буенча

$$x^2 + 16 = 25 + x^2 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{9+x^2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{10};$$



Рәс. 28

$$16 = 34 - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{9+x^2};$$

$$3\sqrt{2} \cdot \sqrt{9+x^2} = 18;$$

$$\sqrt{9+x^2} = 3\sqrt{2};$$

$$9 + x^2 = 18;$$

$$x^2 = 9;$$

$$x = 3.$$

$S_{\text{ниг.}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ һәм $V = 6 \cdot 3 = 18$.

Җавап. 18.

8 *вар.* **1.** Кисем 28 рәсемдә күрсәтелгән. Аның нигез яссылыгы белән кисешү сызыгы EF нигез диагонале AC ка параллель, $BK \perp EF$, $\angle BKB_1 = 60°$, $EB = 10$, $BF = 24$. Бу очракта

$$EF = 26, \ BK = \frac{BE \cdot BF}{EF} = \frac{120}{13}, \ BB_1 = \frac{120\sqrt{3}}{13}.$$

$$V = 5 \cdot 12 \cdot \frac{120\sqrt{3}}{13} = \frac{7200\sqrt{3}}{13}.$$

Җавап. $\frac{7200\sqrt{3}}{13}$.

2. Призманы турыпочмаклы координаталар системасына C түбәсе координаталар башлангычы булырлык итеп урнаштырабыз. CA — Ox күчәрендә, CB — Oy күчәрендә һәм CC_1 Oz күчәрендә ятсын. Ул вакытта $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(0:\ 6;\ 0)$, $P(0;\ 3;\ z)$ $(z > 0)$. $M(1;\ 2;\ 0)$ — медианалар кисешү ноктасы; $\overrightarrow{MP}\{-1;\ 1;\ z\}$. Әгәр φ — MP һәм xOz (AA_1C_1C кыры шушы яссылыкта ята) арасындагы почмак булса,

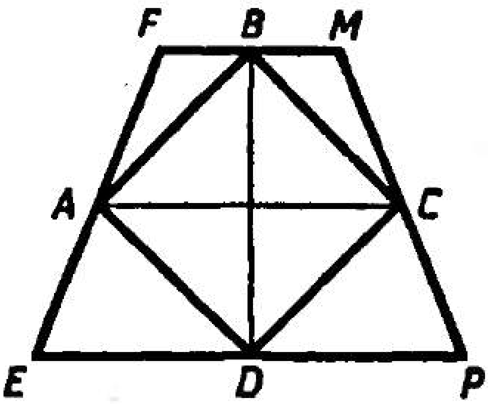
$$\sin\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{MP} \cdot \vec{j}}{\left|\overrightarrow{MP}\right| \cdot \left|\vec{j}\right|}\right|, \text{ бирелә } \vec{j}\{0;1;0\};\ \overrightarrow{MP} \cdot \vec{j} = 1;$$

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{1+1+z^2} = \sqrt{2+z^2}; \qquad \frac{1}{\sqrt{2+z^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

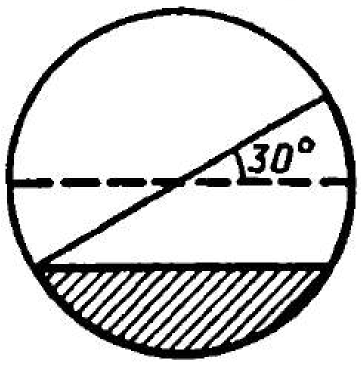
$\sqrt{3} = \sqrt{2+z^2}$; $z^2 = 1$; $z = 1$ $(z > 0)$. Димәк, $CC_1 = 2$.

$$V = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 18.$$

Җавап. 18.



Рәс. 29



Рәс. 30

М—14

1 *вар.* **1.** $768\sqrt{3}$. **2.** $3\pi R^2$.
2 *вар.* **1.** 125. **2.** 3468π.

3 *вар.* **1.** $\frac{576\sqrt{3}}{5}$. **2.** $\frac{16000\pi}{729}$.

4 *вар.* **1.** 36. **2.** $\frac{1024\pi}{27}$.

5 *вар.* **1.** $\frac{441\sqrt{143}}{2}$. Күрсәтмә. B_1FE өчпочмагының туры почмагы B_1FE булган турыпочмаклы өчпочмак икәнлеген исбатларга кирәк.

2. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$. Күрсәтмә. Кисеп алынган кечерәк өлешнең күләме — цилиндр һәм бу цилиндр эченә камалган өчпочмаклы төзек призманың күләмнәре аермасының $\frac{1}{3}$ енә тигез.

6 *вар.* **1.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$.

7 *вар.* **1.** 29 рәсемдә кубның һәм аны камаучы призманың өстән күренешләре бирелә. Әйтик, x — кубның кабыргасы булсын, AC — трапециянең урта сызыгы, $AC = x\sqrt{2}$. Трапециянең биеклеге — $BD = x\sqrt{2}$, $S_{трап} = x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{2} = 2x^2$. Призманың биеклеге x ка тигез.

$$V_{пр} = 2x^2 \cdot x = 2x^3.$$

Моннан $2x\sqrt{2} = a + b$, $x = \frac{a+b}{2\sqrt{2}}$ икәнлеге ачык.

$$V = 2\frac{(a+b)^3}{16\sqrt{2}} = \frac{(a+b)^3\sqrt{2}}{16}.$$

Җавап. $\frac{(a+b)^3\sqrt{2}}{16}$.

2. 30 рәсемдә сыеклыкның тагаракны 30° ка авыштырганнан

соңгы торышы штрихланган. Цилиндрның нигез радиусы R га, ә биеклеге H ка тигез булсын. Ул вакытта савытта калган сыеклык күләме

$$\frac{R^2H(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

гә тигез була.

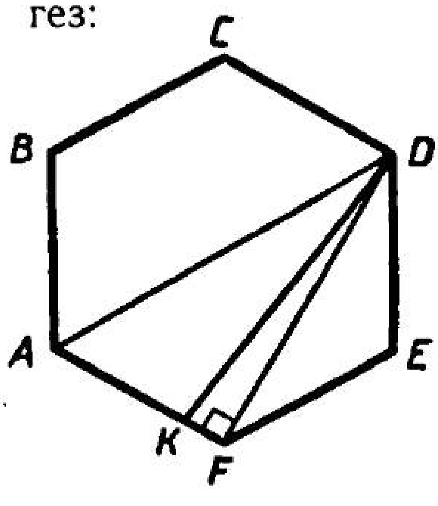
Әлеге нәтиҗә 5 варианттагы 1 мәсьәләне чишеп табылган иде. Агып чыккан сыеклык күләмен исәплик:

$$\Delta V = \frac{\pi R^2 H}{2} - \frac{R^2H(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{R^2H}{12}(2\pi + 3\sqrt{3}).$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{R^2H(2\pi - 3\sqrt{3})}{12 \cdot \frac{1}{2}\pi R^2 H} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,61.$$

Җавап. $\approx 61\,\%$.

8 *вар.* **1.** Кисем яссылыгы нигезнең AF ягы аша узучы кырны кисеп үтә (рәс: 31). $KF = x$ һәм нигезенең ягы a га тигез булсын. Биеклекләре үзара тигез булган призмаларның күләмнәре чагыштырмасы аларның нигезләре чагыштырмасына тигез булуын искә төшерик. Кисем яссылыгы призманы ике призмага бүлә. Нигезе $KDEF$ булган призманың күләме тулы призма күләменең $\frac{1}{4}$ енә тигез:



Рәс. 31

$$S_{KDEF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}x \cdot a\sqrt{3};\quad S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ул вакытта

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}x \cdot a\sqrt{3} = \frac{1}{4}\,\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Бу тигезлекләрдән чыгып исәплибез:

$$x = \frac{a}{4} \text{ һәм } KD = \sqrt{\frac{a^2}{16} + 3a^2} = \frac{7a}{4}.$$

$S_{кис} = KD \cdot h$, биредә h — призманың биеклеге; $S_{кис.} = \frac{7ah}{4}$. Шарт буенча $ah = Q$. Димәк,

$$S_{кис} = \frac{7}{4}Q.$$

Җавап. $\frac{7}{4}Q$.

2. 32 рәсемдә бирелгән ике цилиндрның өстән күренеше сурәтләнә. Нигез диаметры һәм камалган цилиндрның биеклеге x ка тигез, һәм зур цилиндрның нигез радиусы R га тигез булсын. Бу цилиндрның биеклеге x ка тигез булуы үзеннән үзе аңлашыла. Ул вакытта аның күләме $V_1 = \pi R^2 x$.

$$V_2 = \pi\frac{x^2}{4}\cdot x = \frac{\pi x^3}{4}.$$

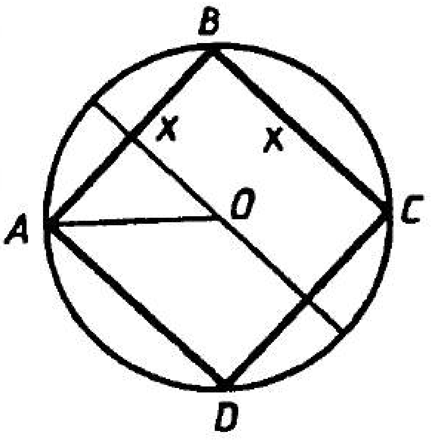
Лəкин $x = R\sqrt{2}$. Димəк,

$$V_1 = \pi R^3\sqrt{2} \text{ һəм } V_2 = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}.$$

Бу вакытта

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2}.$$

Җавап. 1 : 2.



Рəс. 32

М—15

1 *вар*. **1.** $\frac{375}{8}$. **2.** 600.

2 *вар*. **1.** $120\sqrt{3}$. **2.** 600.

3 *вар*. **1.** $\frac{a^2b\sqrt{2}}{4}$. **2.** $120\sqrt{2}$.

4 *вар*. **1.** $\frac{abc\sqrt{2}}{2}$. **2.** $250\sqrt{3}$.

5 *вар*. **1.** $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасының нигезе булып ABC төзек өчпочмагы тора һəм $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 45°$. Ул вакытта CC_1B_1B кырының квадрат икəнлеге җиңел исбатлана. Һəр кабырганың озынлыгын x дип билгелибез. Ул вакытта

$$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = \frac{x^2\sqrt{2}}{2}, \text{ ə } S_{CC_1B_1B} = x^2.$$

Шарт буенча

$$x^2 + 2\frac{x^2\sqrt{2}}{2} = 4(1 + \sqrt{2}).$$

Моннан $x = 2$. Призманың кабыргасын белгəннəн соң, биеклеген дə табу җиңел, ул $\frac{2}{\sqrt{3}}$ гə тигез; $S_{\text{ниг}} = \sqrt{3}$. Ул вакытта

$$V_{\text{пр.}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3} = 2.$$

Җавап. 2.

2. Ян кабыргадан капма-каршы кырның диагоналенə кадəр ераклык ян кабыргадан бу кырга кадəр булган ераклыкка тигез. Призманың перпендикуляр кисемен төзибез. d — ян кабыргадан капма-каршы ятучы ян кырга кадəр ераклык, m — бу ян кабыргага каршы ятучы перпендикуляр кисемнең ягы, һəм l — призманың ян кабыргасы булсын.

$$V = S_{\text{перп.к.}}\cdot l = \frac{1}{2}dml = \frac{1}{2}dQ,$$

биредə Q — ян кырның мəйданы. Ул вакытта

$$V=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 40=100.$$

Җавап. 100.

6 *вар.* **1.** $ABCA_1B_1C_1$ өчпочмаклы авыш призмасының нигезе булып ABC турыпочмаклы өчпочмагы ($\angle C=90°$) тора, һәм AA_1C_1C кырының яссылыгы нигез яссылыгына перпендикуляр булсын. Бу очракта CC_1B_1B квадрат булуы һәм призма биеклеге A_1O ның нигезнең AC ягына проекцияләнүе җиңел исбатлана. Призманың нигез якларын x дип билгелик. Ул вакытта $A_1O=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. O ноктасыннан AB га OK перпендикулярын төшерәбез, шулай ук K һәм A_1 нокталарын тоташтырабыз. Бу очракта $A_1K\perp AB$, $AO=\frac{x}{2}$, $OK=\frac{x}{2\sqrt{2}}$, $A_1K=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{8}}=\frac{x\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$.

$$S_{AA_1B_1B}=\frac{x\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\cdot x\sqrt{2}=\frac{x^2\sqrt{7}}{2},$$

$$S_{AA_1C_1C}=\frac{x^2\sqrt{3}}{2},\quad S_{CC_1B_1B}=x^2.$$

Шарт буенча

$$\frac{x^2\sqrt{7}}{2}+\frac{x^2\sqrt{3}}{2}+x^2=2(\sqrt{7}+\sqrt{3}+2).$$

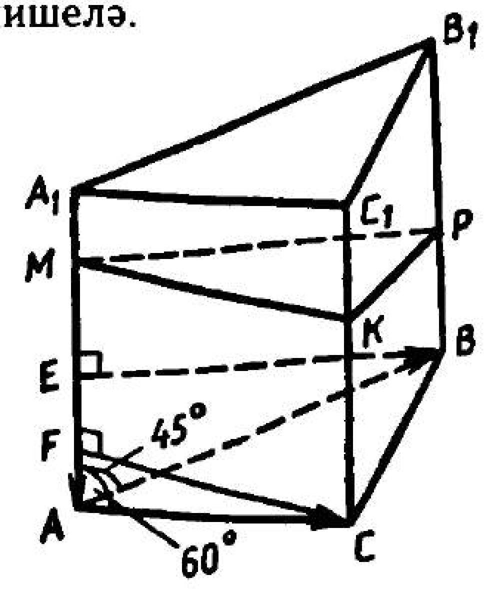
Моннан $x=2$.

$$V=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{x^3\sqrt{3}}{4}.$$

$x=2$ булганлыктан, $V=2\sqrt{3}$.

Җавап. $2\sqrt{3}$.

2. $30\sqrt{2}$. Күрсәтмә. Мәсьәлә 5 варианттагы 2 мәсьәлә кебек чишелә.



Рәс. 33

7 *вар.* **1.** 33 рәсемдә MPK — призманың перпендикуляр кисеме. $V_{пр}=S_{MPK}\cdot AA_1$. Перпендикуляр кисемнең мәйданын исәпләү өчен, PMK почмагын, ягъни EB һәм FC чалышма турылары арасындагы почмакны табарга кирәк, биредә $EB\perp AA_1$ һәм $FC\perp AA_1$, $EB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $FC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $EA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $FA==\frac{a}{2}$. Әгәр φ — эзләнә торган почмак булса, $\cos\varphi=\left|\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{FC}}{|\overrightarrow{EB}|\cdot|\overrightarrow{FC}|}\right|$.

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}) =$$

$$= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} + a \cdot \frac{a}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{a^2}{4}(2 - \sqrt{2}).$$

$\widehat{\overrightarrow{FA}\,\overrightarrow{AB}} = 135^\circ$ һәм $\widehat{\overrightarrow{EA}\,\overrightarrow{AC}} = 120^\circ$ икәне билгеле.

$$\cos\varphi = \frac{a^2\,(2 - \sqrt{2})}{4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}};$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}}.$$

$$S_{MPK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{2} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt[4]{2};$$

$$V = \frac{a^2\, b\, \sqrt[4]{2}}{4}.$$

Җавап. $\frac{a^2\, b\, \sqrt[4]{2}}{4}$.

2. Шарт буенча BB_1D_1D — турыпочмаклык. Моннан $BD \perp DD_1$ икәнлеге килеп чыга. Ә $AA_1 \parallel DD_1$ булганлыктан, $BD \perp AA_1$ була, һәм шарт буенча $BD \perp AC$. Димәк, ABC яссылыгы AA_1C_1C диагональ кисеме яссылыгына перпендикуляр. Шуңа күрә призма биеклеге A_1O бу кисем яссылыгында ята.

$$A_1O = \frac{S_{AA_1C_1C}}{AC} = \frac{30}{5} = 6.$$

$$S_{\text{ниг}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10;\ V = S_{\text{ниг}} \cdot A_1O = 60.$$

Җавап. 60.

8 *вар*. **1.** A_1O — призманың биеклеге булсын. O ноктасыннан AC һәм AB га OE һәм OF перпендикулярын төшерәбез. Ул вакытта $A_1E \perp AC$ һәм $A_1F \perp AB$. Шарт буенча $A_1E = 7$ һәм $A_1F = 20$. FO ны AC белән K ноктасында кисешкәнче дәвам итәбез. AFK турыпочмаклы өчпочмагы табыла, биредә $\angle FKA = 30^\circ$. AA_1E өчпочмагында $AE = 24$ һәм AA_1F өчпочмагында $AF = 15$. Ул вакытта турыпочмаклы AFK өчпочмагында $AK = 30$ һәм $EK = 6$. OEK өчпочмагында $OE = EK \cdot \operatorname{tg}30^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Хәзер A_1O ны табарга була:

$$A_1O = \sqrt{A_1E^2 - OE^2} = \sqrt{49 - 12} = \sqrt{37};$$

$$S_{\text{ниг}} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 50\frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3};\ V = 500\sqrt{3} \cdot \sqrt{37} = 500\sqrt{111}.$$

Җавап. $500\sqrt{111}$.

2. BB_1D_1D диагональ кисеме параллелепипедны ике тигез призмага бүлә. Шарттан чыгып, BB_1D_1D ның квадрат булуын исбатларга мөмкин. Квадратның диагональләре O ноктасында кисешәләр. O ноктасыннан AA_1 гә OK перпендикулярын төшерәбез, K ноктасын B һәм D нокталары белән тоташтырабыз. BKDның $ABDA_1B_1D_1$ призмасының перпендикуляр кисеме икәне җиңел исбатлана, $BD = a\sqrt{2}$;

$$OK = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot \operatorname{tg}30^o = \frac{a\sqrt{6}}{6};\quad S_{BKD} = \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6};$$

$$V_{\text{пр}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Ул вакытта $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Җавап. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

М—16

1 *вар.* **1.** $\frac{2h^3\sqrt{3}\,tg\,\alpha}{27}$. **2.** $\frac{a^3\sin^2\alpha\cdot \operatorname{tg}\beta}{3}$.

2 *вар.* **1.** $\frac{d^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{24}$. **2.** $\frac{a^3}{6}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\beta$.

3 *вар.* **1.** $\frac{4}{3}h^3\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **2.** $\frac{5}{3}$.

4 *вар.* **1.** $\frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha+1}$. **2.** $72\sqrt{3}$.

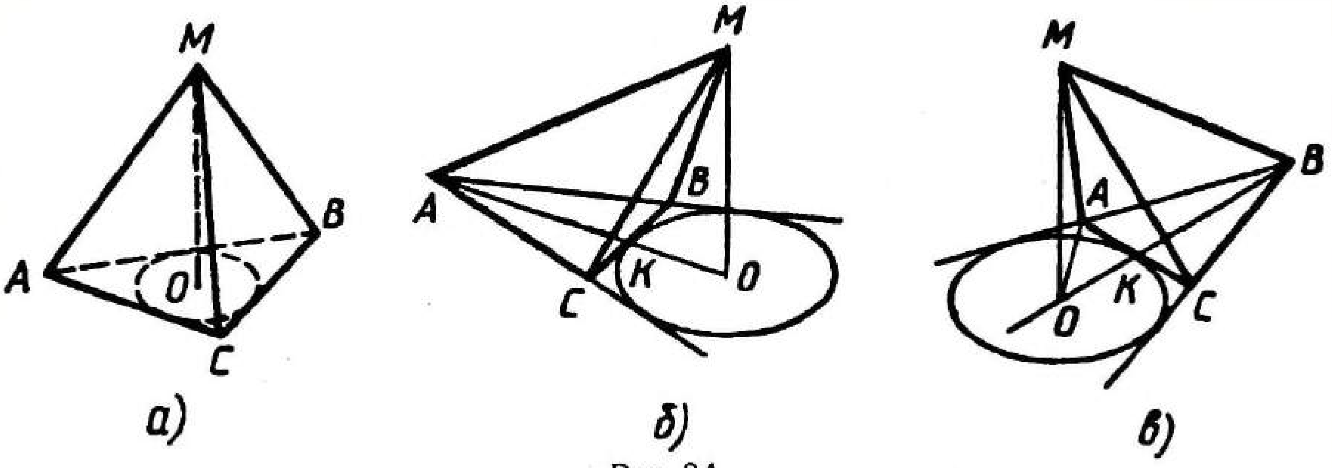
5 *вар.* **1.** $\frac{d^3(1+\sin 2\alpha)}{3\sin^2\beta\cdot\cos\beta\cdot\sin 2\alpha}$.

2. $DABC$ — өчпочмаклы төзек пирамида, һәм DO — аның биеклеге булсын. Нигез биеклеге BE ны төзибез һәм E ноктасыннан DB кабыргасына EF перпендикулярын төшерәбез. F ноктасын A һәм C нокталары белән тоташтырабыз; $\angle AFC = \alpha$ — ике чиктәш ян кыр арасындагы икекырлы почмакның сызыкча почмагы. DOB һәм EFB өчпочмакларының охшашлыгыннан $\frac{DO}{EF} = \frac{OB}{FB}$ икәнлеге килеп чыга. Моннан $DO = \frac{EF\cdot OB}{FB}$, $EF = \frac{a}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $OB = \frac{a}{\sqrt{3}}$. EFB өчпочмагыннан исәплибез:

$$FB = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3 - ctg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ул вакытта

$$DO = \frac{a\cdot ctg\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}},$$



Рәс. 34

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{a^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{3 - ctg^2\frac{\alpha}{2}}}}.$$

Җавап. $\frac{a^3 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a^3 \cos\frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 1}}.$

6 *вар*. **1.** $\frac{2d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\sin\alpha}$. **2.** $\frac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{6 \cdot \sqrt{-\cos\alpha}}$.

Күрсәтмә. Мәсьәлә 5 варианттагы 2 мәсьәлә кебек чишелә.

7 *вар*. **1.** Әгәр ян кырларның мәйданнары тигез булса, бу кырларның биеклекләре үзара тигез һәм M түбәсе нигезләрнең яклары яткан турылардан тигез ераклыкта ята. Нигездә төзек өчпочмак ятканлыктан, 34 рәсемдә күрсәтелгән өч төрле вариант булырга мөмкин.

а) O — камалган әйләнәнең үзәге: $AO = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. $MO = \sqrt{2 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

б) O — тышкы камалган әйләнә үзәге. Бу әйләнәнең радиусы $r = \frac{2S}{a + b - c}$ формуласы буенча исәпләнә, S — өчпочмак мәйданы, ә a, $в$ һәм c — аның яклары. Бу очракта

$$r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$AO = AK + KO = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} > AM.$$

Димәк, бу вариант тормышка ашмый.

в) O — тышкы камалган әйләнә үзәге: $AK = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$AO = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{2} = AM$. Димәк, бу вариант та тормышка ашмый.

Җавап. $\frac{1}{3}$.

2. M, P һәм C нокталарының бер туры өстендә ятканын күрсәтик (рәс. 35.).

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}. \qquad (2)$$

(1) һәм (2) дән чыгып, $\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{MP}$ икәнен табабыз. Бу исә күрсәтелгән өч ноктаның бер туры өстендә ятуын аңлата. Шулай ук M, K һәм D ның бер туры өстендә ятуы исбатлана. Бу очракта сүз пирамиданы күләмнәре $1:2$ чагыштырмасындагы ике өлешкә бүлә торган MDC яссылыгы турында бара.

Җ а в а п. $1:2$.

8 *вар*. **1.** $\frac{\sqrt{105}}{4}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{3\sqrt{11}}{4}$. К ү р с ә т м ә. Мәсьәлә 7 вариантның 1 мәсьәләсе кебек чишелә, ләкин бу очракта барлык өч мөмкинлек тә тормышка аша.

2. 36 рәсемдә күрсәтелгән пирамиданы тикшерик. $MA_1B_1C_1$ пирамидасында нигез мәйданы $S_1 = \frac{1}{2}MC_1\cdot MB_1\cdot\sin\alpha$. Пирамиданың биеклеге $h_1 = MA_1\cdot\sin\varphi$.

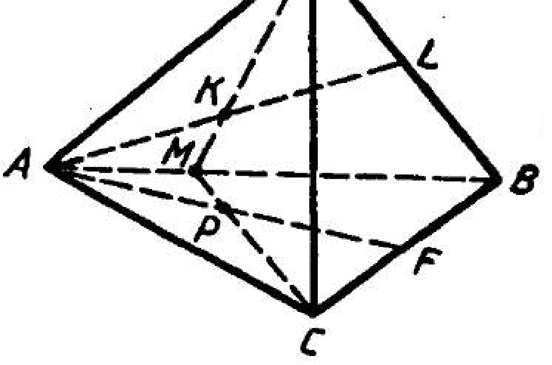
$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot MC_1\cdot MB_1\ \sin\alpha\cdot MA_1\sin\varphi = \frac{1}{6}MC_1\cdot MB_1\cdot MA_1\cdot\sin\varphi.$$

$MABC$ пирамидасында да шулай ук.

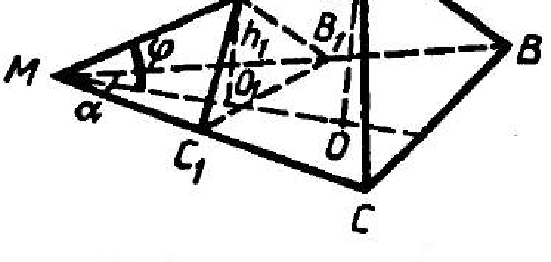
$$V = \frac{1}{6}\cdot MC\cdot MB\cdot MA\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi.$$

Ул вакытта

$$\frac{V_1}{V} = \frac{MA_1\cdot MB_1\cdot MC_1}{MA\cdot MB\cdot MC}.$$



Рәс. 35



Рәс. 36

Безнең очрак өчен $\frac{V_1}{V} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{20}$.

Җ а в а п. 1 : 19.

М—17

1 *вар.* **1.** $\frac{256\pi\sqrt{3}}{9}$. **2.** $\frac{\pi}{4}$.

2 *вар.* **1.** 36π. **2.** $\frac{\pi}{2}$.

3 *вар.* **1.** $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$. **2.** 100π.

4 *вар.* **1.** $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. **2.** $\frac{18\pi\sqrt{14}}{5}$.

5 *вар.* **1.** $\dfrac{\pi a^3 \sin^2 2\beta \cdot \cos\beta \sin^2\frac{\alpha}{2}}{12\sin^2\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$

2. 60°. К ү р с ә т м ә. Трапециянең зуррак нигезе — конус нигезенең диаметры икәнлекне исбатларга кирәк.

6 *вар.* **1.** $\frac{144\pi}{5}$.

2. 45°. К ү р с ә т м ә. Трапециянең капма-каршы яклар суммалары тигез булырга тиешлекне исәпкә алырга кирәк. Ян якларның кечерәген x дип билгеләсәк, $\sqrt{x^2+4} + x = 6$ була. Моннан $x = \frac{8}{3}$ һәм конус нигезенең радиусы $\frac{4}{3}$ кә тигез. Аннан соңгы чишелеш җиңел аңлашыла.

7 *вар.* **1.** Шарт буенча, иң зур мәйданлы кисем күчәр киселеме белән тәңгәл килми. Димәк, бу кисемдә төзүчеләр арасындагы почмак — туры. Әйтик, AMB өчпочмагы — кисем булсын, биредә M — конусның түбәсе. Нигезнең үзәге булган O дан AB га OK перпендикуляры төшерәбез, K һәм M нокталарын тоташтырабыз, $\angle MKO = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. AMB өчпочмагы — тигезьянлы һәм турыпочмаклы, $MK = \frac{L\sqrt{2}}{2}$, $MO = MK \cdot \sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{L\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{L\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$.

Конус нигезенең радиусы:

$$R = BO = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{3}} = \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$OK = \frac{L\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{L\sqrt{2}}{2\sqrt{3}};$$

$$\cos\angle KOB = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{2}.$$

Димәк, $\angle AOB = 120°$ һәм AB — төзек өчпочмакның ягы. Бу очракта AMB өчпочмагы бу конуска камалган өчпочмаклы төзек пирамида-

ның кыры булып тора, шул ук вакытта бу пирамиданың ян кабыргалары үзара перпендикуляр. Пирамиданың күләме $\frac{L^3}{6}$ га тигез, конусның күләмен исәплибез:

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2L^2}{3} \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{2L^3\sqrt{3}\pi}{27}.$$

Кисеп алынган өлешнең күләме:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{2L^3\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{L^3}{6}\right) = \frac{L^3}{162}(4\pi\sqrt{3} - 9).$$

Җ а в а п. $\frac{L^3}{162}(4\pi\sqrt{3} - 9)$.

2. 37 рәсемдә FM, FO һәм MO — конусның төзүчесе, биеклеге һәм нигез радиусы. CMB өчпочмагының якларын белгәннән соң, камаучы әйләнәнең радиусын табарга мөмкин: $MO = \frac{25}{4}$. AME өчпочмагыннан, биредә $AM = 10$, $ME = 8$ һәм $AE = 6\sqrt{3}$, AME почмагының косинусын табабыз: $108 = 100 + 64 - 2 \cdot 80\cos\angle AME$, $\cos\angle AME = \frac{7}{20}$.

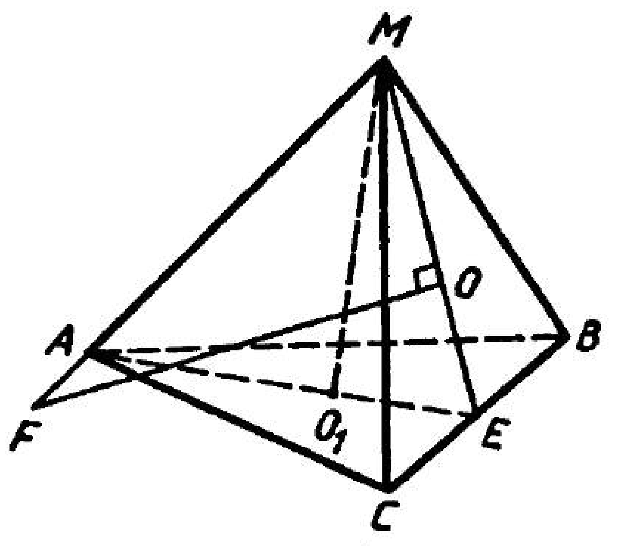
$$\operatorname{tg}\angle AME = \frac{3\sqrt{39}}{7},\ FO = MO \cdot \operatorname{tg}\angle AME = \frac{25}{4} \cdot \frac{3\sqrt{39}}{7} = \frac{75\sqrt{39}}{28},$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{625}{16} \cdot \frac{75\sqrt{39}}{28} = \frac{15625\pi\sqrt{39}}{448}.$$

Җ а в а п. $\frac{15625\pi\sqrt{39}}{448}$.

8 *вар*. **1.** $\frac{H^3}{18}(8\pi + 3\sqrt{3})$. **2.** $\frac{15625\pi\sqrt{15}}{1344}$. К ү р с ә т м ә. Мәсьәләләр 7 вариант мәсьәләләре кебек чишелә.

М—18



Рәс. 37

1 *вар*. **1.** 456.

2. $\frac{26\pi\sqrt{3}}{3}$.

2 *вар*. **1.** $168\sqrt{3}$.

2. $\frac{560\pi}{3}$.

3 *вар*. **1.** $\frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{12}$.

2. 576π.

4 *вар*. **1.** $\frac{7m^3\sqrt{2}}{6}$.

2. 8064π.

5 *вар*. **1.** Кисек пирамиданы тулы пирамида итеп төзеп бетерәбез. Бу пирамиданың күләме $108\sqrt{3}$ икәнлеген исәпләп табарга мөмкин. Кисек пирамиданың өске нигезе яссылыгы тулы пирамиданың күләмен $1:27$ чагыштырмасында бүлә (нигез яклары $1:3$ чагыштырмасында). Бу очракта, кисек пирамиданың күләме $V=\frac{26}{27}\cdot 108\sqrt{3}=104\sqrt{3}$.

Җавап. $104\sqrt{3}$.

2. $54\pi\sqrt{3}$.

6 *вар*. **1.** 268,8. Күрсәтмә. Мәсьәлә 5 вариантның 1 мәсьәләсе кебек чишелә. Тулы пирамиданың күләме $\frac{1536}{5}$ га, ә кисек пирамиданың күләме $V=\frac{7}{8}\cdot\frac{1536}{5}=268{,}8$.

2. $\frac{32000\pi\sqrt{3}}{3}$.

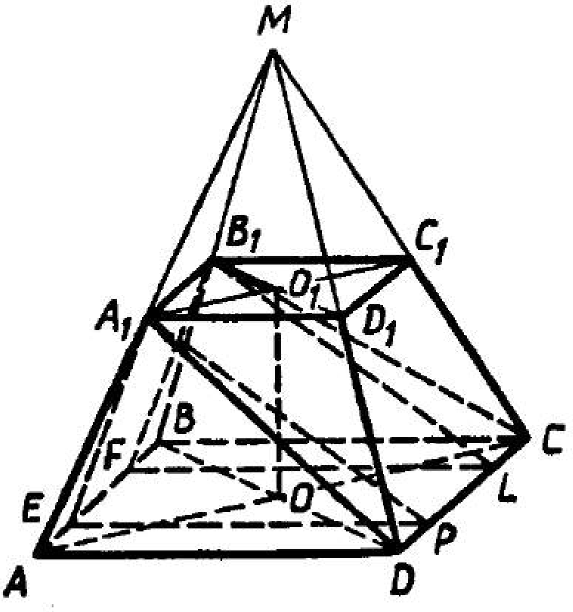
7 *вар*. **1.** 38 рәсемдә EA_1P һәм FB_1L яссылыклары нигез яссылыгына перпендикуляр. AA_1DBB_1C күпкырлыгы бу яссылыклар белән EA_1PFB_1L туры призмасына һәм үзара тигез булган A_1AEPD һәм B_1BCLF пирамидаларына бүленә. Кисек пирамиданың биеклеге h ка тигез булсын. Ул вакытта призманың күләме $V'=\frac{1}{2}ahb$, ә пирамиданың күләме $V''=\frac{1}{3}a\cdot\frac{a-b}{2}\cdot h=\frac{1}{2}a(a-b)h$. AA_1DBB_1C күпкырлыгының күләме:

$$V_1=V'+2V''=\frac{abh}{2}+\frac{a(a-b)h}{3}=\frac{h}{6}a(b+2a).$$

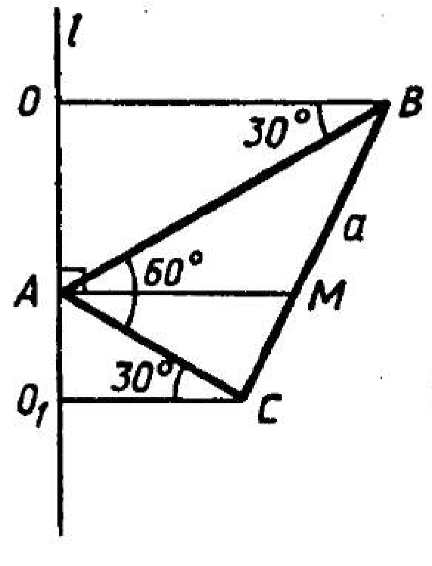
Кисек пирамиданың күләме:

$$V=\frac{h^3}{3}(a^2+ab+b^2).$$

Бу күпкырлыкны кисек пирамидага тутыручы икенче күпкырлыкның күләме:



Рәс. 38



Рәс. 39

$$V_2 = \frac{h}{3}(a^2+ab+b^2) - \frac{h}{6}a(b+2a) = \frac{h}{6}b(a+2b).$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a(b+2a)}{b(a+2b)}.$$

Җ а в а п. $\frac{a(b+2a)}{b(a+2b)}$.

2. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. К у р с ә т м ә. Әйләнү җисеменең күләмен табу өчен, $OBCO_1$ трапециясен l күчәре тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан кисек конус күләменнән OBA һәм O_1CA өчпочмакларын шушы ук күчәр тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан конусларның күләмнәрен алырга кирәк (рәс. 39.).

8 *вар*. **1.** $\frac{11}{45}$. К у р с ә т м ә. Мәсьәлә 7 вариантның 1 мәсьәләсе кебек чишелә.

2. $\frac{2\pi a^3}{9}$. К у р с ә т м ә. Әйләнү җисеменең күләмен табу өчен, $AEFC$ турыпочмаклыгын l күчәре тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан цилиндр күләменнән $AEOB$ һәм $CFOB$ трапецияләрен шул ук күчәр тирәсендә әйләндерүдән килеп чыккан кисек пирамидалар күләмен алырга кирәк (рәс. 40). $\angle AOC = 60°$ икәнлеген исәпкә алыгыз.

М—19

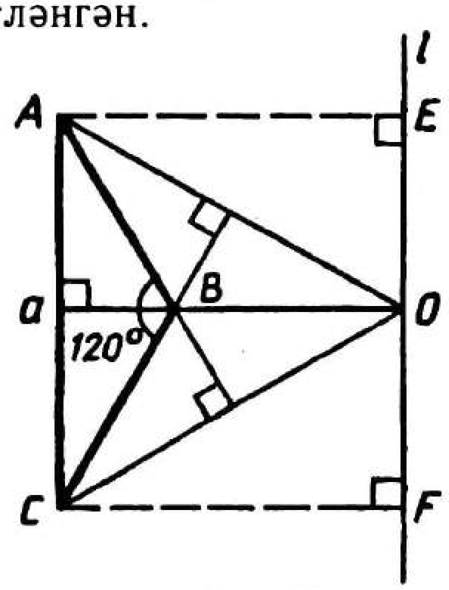
1 *вар*. **1.** $\frac{128\pi}{3}$. **2.** $\frac{4}{9}$.

2 *вар*. **1.** 12π. **2.** $\frac{32}{9}$.

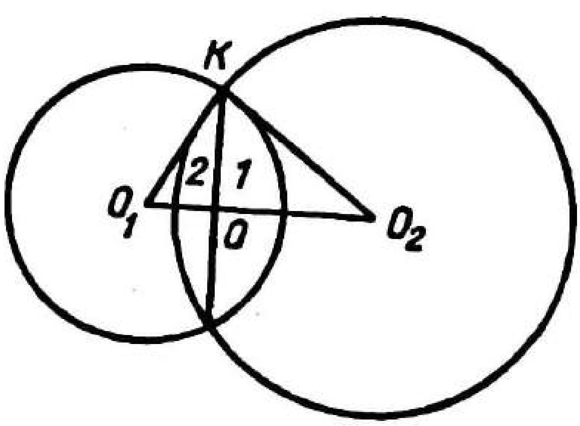
3 *вар*. **1.** $\frac{52\pi}{3}$. **2.** 36π.

4 *вар*. **1.** $\frac{50\pi}{3}$. **2.** $\frac{62500\pi}{81}$.

5 *вар*. **1.** 41 рәсемдә тикшерелә торган фигураның күчәр кисеме сурәтләнгән.



Рәс. 40



Рәс. 41

$$S_{O_1KO_2}=126;\ KO=12;\ OO_1=5;\ OO_2=16.$$

Беренче сегментның биеклеге $h_1=13-5=8$. Аның күләме:

$$V_1=\pi\cdot 64\left(13-\frac{8}{3}\right)=\frac{1984\pi}{3}.$$

Икенче сегментның биеклеге $h_2=20-16=4$. Аның күләме:

$$V_2=\pi\cdot 16\left(20-\frac{4}{3}\right)=\frac{896\pi}{3}.$$

Болардан чыгып, ике яклап кабарынкы пыяланың күләме:

$$V=\frac{1984\pi}{3}+\frac{896\pi}{3}=960\pi.$$

Җ а в а п: 960π.

2. Камалган шарның радиусы — R, конусның төзүчесе һәм нигез яссылыгы арасындагы почмакның зурлыгы — φ булсын. Конусның нигез радиусы $r=R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. Конусның биеклеге $H=R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

$$V_{\text{кон.}}=\frac{1}{3}\pi R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\cdot R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi=\frac{\pi R^3\operatorname{tg}\varphi}{3\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}=\frac{2\pi R^3}{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

$V_{\text{ш}}=\frac{4}{3}\pi R^3$. Шарт буенча:

$$\frac{2\pi R^3}{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)}=\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=a>0$ булсын. Ул вакытта түбәндәге тигезләмәне табабыз:

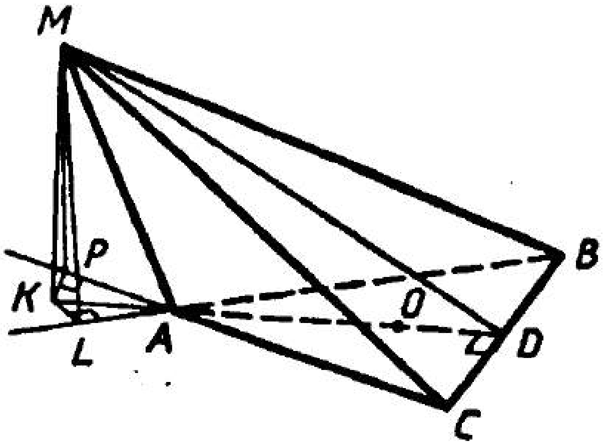
$$9a^2-9a+2=0.$$

Тигезләмәнең тамырлары $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ һәм $\varphi=60°$ яки $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ һәм $\varphi=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Җ а в а п. $60°$ яки $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

6 *вар.* **1.** $\frac{1444\pi}{3}$. К ү р с ә т м ә. Шарларның үзәкләре бу шар өслекләре кисешкән әйләнә яссылыгының бер ягында ятканын исәпкә алырга кирәк.

2. $\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ яки $\pi-4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. К ү р с ә т м ә. Мәсьәлә 5 варианттагы 2 мәсьәлә кебек чишелә.



Рәс. 42

7 *вар.* **1.** Бирелгән пирамида 42 рәсемдә сурәтләнә. Теләсә нинди тетраэдр эченә шар камарга мөмкин. Бу шарның радиусын $R = \frac{3V}{S}$ формуласы буенча исәпләп табарга мөмкин, биредә V — тетраэдрның күләме, S — аның өслек мәйданы. K ноктасыннан BC ягына перпендикуляр төшерәбез, AC һәм AB якларын дәвам иттерәбез. Өч перпендикуляр турындагы теорема буенча $MD \perp AB$, $ML \perp AB$ һәм $MP \perp AC$ икәнен исбатларга мөмкин:

$$KD = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$KA = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$KP = \frac{1}{2}KA = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

MKD өчпочмагыннан:

$$MD = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{36}\right)} = \frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

$$S_{BMC} = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

MKL өчпочмагыннан:

$$ML = MP = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} + \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{MAC} = S_{MAB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{7\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt[4]{\frac{4}{3}}.$$

$$R = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot 2}{4 \cdot \sqrt[4]{3} \cdot 3\sqrt{3}} = 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{5}{4}}.$$

$$S_{ш} = 4\pi \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-\frac{5}{2}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

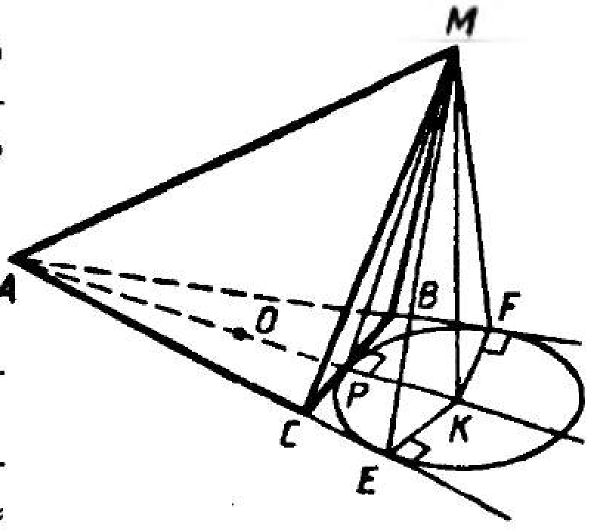
Җавап. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

2. Куыш шарның күләме

$$V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3).$$

Стеналарының калынлыгы 3 см булганлыктан, $r = 6$ см. Ул вакытта

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(729 - 216) = 684\pi \text{ см}^3.$$



Рәс. 43

Шарның авырлыгы $P = V_ш \rho_ш g$, биредә $\rho_ш$ — материалның тыгызлыгы. Шарның суга батырылган өлеше — шар сегменты, аның күләме

$$V_c = \pi \cdot 144(9 - \frac{12}{3}) = 720\pi \text{ см}^3.$$

Этеп чыгару көче

$F = V_c \rho_{су} g = 720\pi \rho_{су} g$ (1 г/см³— суның тыгызлыгы).

Архимед законы буенча $P = F$, ягъни $684\pi\rho_ш g = 720\pi\rho_{су} g$. Моннан $\rho_ш \approx \approx 1{,}05$ г/см³.

8 *вар*. **1.** $\frac{4\pi}{27}$. Күрсәтмә. Мәсьәлә 7 вариантның 1 мәсьәләсе кебек чишелә. $KE = KP = KF$ икәнлеген исәпкә алырга кирәк (рәс. 43). Ул вакытта пирамиданың ян кырларының биеклекләре үзара тигез һәм $S_{ян} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot MP$.

2. Куыш шарның авырлыгы $P = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\rho_ш g$, этеп чыгару көче $F = \frac{2}{3} \cdot \pi R^3 \rho_{су} g$, $P = F$ булганлыктан,

$$\frac{4}{3}\pi\,(R^3 - r^3)\,\rho_ш g = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_{су} g;$$

$$2(R^3 - r^3)\rho_ш = R^3 \rho_{су};$$

$$2\left(1 - \left(\frac{2}{R}\right)^3\right)\frac{\rho_ш}{\rho_{су}} = 1.$$

$$\left(\frac{r}{R}\right)^3 = 1 - \frac{\rho_{су}}{2\rho_ш};$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{су}}{2\rho_ш}} \text{ һәм } r = R = \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{су}}{2\rho_ш}}.$$

Ул чагында шар стенасының калынлыгы

$$h = R - r = R\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{су}}{2\rho_ш}}\right).$$

Җавап. $R\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_{су}}{2\rho_ш}}\right)$.

ӨМ

1 *вар*. **1.** $2x - 3y + z - 10 = 0$. **2.** $\arccos\frac{3\sqrt{21}}{42}$.

2 *вар*. **1.** $m = \frac{7}{4}$. **2.** $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3 *вар.* **1.** $A(x_0; y_0; z_0)$ ноктасыннан $ax + by + cz + d = 0$ яссылыгына кадәр ераклыкның түбәндәге формула буенча исәпләнүен исбатлап була:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Әлеге очракта

$$d = \frac{|-2 - 3 + 4 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{2}{3} < R\ (R = 1).$$

Кисем радиусы

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{\sqrt{5}}{3};\ S = \frac{5\pi}{9}.$$

Җавап. $\frac{5\pi}{9}$.

2. Oz күчәренә параллель яссылык тигезләмәсенең гомуми күренеше: $ax + by + d = 0$. $A(1; 0; 2)$ һәм $B(0; 3; 1)$ нокталары бу яссылыкта ятканлыктан,

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ 3b + d = 0. \end{cases}$$

Моннан

$$a = -d,$$
$$b = -\frac{d}{3}.$$

Ул вакытта

$$-dx - \frac{d}{3}y + d = 0,$$

һәм $d \neq 0$ булганлыктан,

$$3x + y - 3 = 0.$$

Җавап. $3x + y - 3 = 0$.

4 *вар.* **1.** Күрсәтмә. Шарның үзәге $M(3; 2; -4)$ нан күрсәтелгән яссылыкка кадәр ераклык 6 га тигез икәнлекне исбатларга кирәк.

2. $y - z - 2 = 0$. Күрсәтмә. Мәсьәлә 3 варианттагы 2 мәсьәлә кебек чишелә.

5 *вар.* **1.** $A_1(x; y; z)$ — эзләнелгән нокта булсын һәм AA_1 кисемтәсе бирелгән яссылыкны P ноктасында кисеп үтә, дип уйлыйк. Яссылыкка перпендикуляр вектор $\vec{n}\{1; 1; -1\}$, $AA_1 \perp \alpha$ булганлыктан, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{k} \cdot \vec{n}$, $\overrightarrow{AA_1}\{k; k; -k\}$. Икенчедән, $\overrightarrow{AA_1}\{x - 1; y - 1; z - 1\}$. Димәк,

$$\begin{cases} x - 1 = k \\ y - 1 = k \\ z - 1 = k \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= k + 1 \\ y &= k + 1 \\ z &= 1 - k. \end{aligned}$$

P ноктасы — AA_1 кисемтәсенең уртасы һәм $P(\frac{k+2}{2}; \frac{k+2}{2}; \frac{2-k}{2})$. P ноктасы α яссылыгында ятканлыктан, $\frac{k+2}{2} + \frac{k+2}{2} - \frac{2-k}{2} - 2 = 0$. Моннан $k = \frac{2}{3}$ һәм $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{5}{3}$, $z = \frac{1}{3}$.

Җавап. $A_1\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

2. Бирелгән туры Ox күчәрен $A(-1; 0; 0)$ ноктасында һәм Oy күчәрен $B(0; 1; 0)$ ноктасында кисеп үтә. A, B һәм M нокталары $ax + by + cz + d = 0$ яссылыгын билгелиләр. Бирелгән нокталар яссылыкта ятканлыктан,

$$\begin{cases} -a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ a + b - 2c + d = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = d \\ b = -d \\ c = \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Бу очракта яссылык тигезләмәсе түбәндәге рәвешне ала:

$$2x - 2y + z + 2 = 0.$$

Җавап. $2x - 2y + z + 2 = 0$.

6 *вар.* **1.** $P(x; y; z)$ булсын. P ноктасы EF турысында ятканлыктан, $\overrightarrow{EP} = k \cdot \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EF}\{1; 1; 2\}$, $\overrightarrow{EP}\{x - 1; y + 2; z - 1\}$. Моннан,

$$\begin{cases} x - 1 = k \\ y + 2 = k \\ z - 1 = 2k, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = k + 1 \\ y = k - 2 \\ z = 2k + 1. \end{cases}$$

Икенче яктан, P ноктасы яссылыкта ята, шуңа күрә

$$k + 1 - 2(k - 2) + 2k + 1 - 3 = 0 \text{ һәм } k = -3.$$

Шунлыктан

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \\ z = -5. \end{cases}$$

Җавап. $P(-2; -5; -5)$.

2. Эзләнелә торган яссылык түбәндәге рәвешне алсын:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

$$x - 2y + z - 1 = 0$$

яссылыгы белән эзләнелә торган яссылык перпендикуляр булганлыктан, бу яссылыкларга перпендикуляр булган $\vec{n}_1\{a;\ b;\ c\}$ һәм $\vec{n}_2\{1;\ -2;\ 1\}$ векторлары да үзара перпендикуляр була. Ул вакытта $a - 2b + c = 0$. Моннан тыш, бирелгән E һәм F нокталарының координаталары яссылык тигезләмәсен канәгатьләндерә, ягъни:

$$a - b + c + d = 0 \quad \text{һәм} \quad 2a + b - c + d = 0.$$

Килеп чыккан тигезләмәләр системасын чишеп, эзләнелә торган яссылыкның тигезләмәсен табабыз:

$$2x + 3y + 4z - 3 = 0.$$

7 вар. **1.** MO — пирамиданың биеклеге булсын. Пирамиданы турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырабыз; O — координаталар башлангычы, Ox күчәре BA нуры белән бер юнәлештә, Oy күчәре AD нуры белән, ә Oz күчәре OM нуры белән. DMC яссылыгының тигезләмәсен язабыз:

$$D(1;\ 1;\ 0);\ C(-1;\ 1;\ 0);\ M(0;\ 0;\ 1).$$

Бу нокталарның координаталары

$$ax + by + cz + d = 0$$

тигезләмәсен канәгатьләндерә. Тигезләмәләр системасын табабыз:

$$\begin{cases} a + b + d = 0 \\ -a + b + d = 0 \\ c + d = 0. \end{cases}$$

Системаны чишеп, яссылыкның тигезләмәсе

$$y + z - 1 = 0$$

икәнен күрергә мөмкин.

Бу яссылыкка перпендикуляр булган вектор: $\vec{n}\{0;\ 1;\ 1\}$. Әгәр φ — эзләнелә торган почмак булса,

$$\sin\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\vec{n}|}\right|;\ \overrightarrow{AM}\{-1;\ 1;\ 1\};\ \sin\varphi = \left|\frac{1 + 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Җавап. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Эзләнелә торган яссылык $\vec{m}$ векторы юнәлешенә параллель булырга тиеш, шунлыктан яссылыкта бу турыга параллель туры булырга тиеш. Моның өчен эзләнелгән яссылыкта өченче C ноктасын табабыз, ул $A(1;\ -1;\ 1)$ ноктасын $\vec{m}\{3;\ 1;\ -1\}$ векторына параллель күчергән вакытта аның сурәте булып тора: $C(4;\ 0;\ 0)$. Димәк, эзләнелә торган яссылыкны билгеләүче A, B һәм C нокталарын таптык. Хәзер бу яссылыкның тигезләмәсен язасы гына калды.

Җавап. $x - 5y - 2z - 4 = 0$.

8 *вар*. **1.** 60°. Күрсәтмә. Пирамиданы турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырырга, AMD һәм DMC яссылыкларының тигезләмәләрен табарга кирәк. Ул чагында, әгәр $\vec{n}_1$ һәм $\vec{n}_2$ — бу яссылыкларга перпендикуляр векторлар, һәм φ — эзләнелә торган почмак булса,

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

2. Яссылыкларның кисешү сызыгында ятучы A һәм B нокталарын табыйк.

1) $x = 0$ булсын. Ул чагында

$$\begin{cases} -y + z - 1 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Моннан $y = -4, z = -3$ һәм $A(0; -4; -3)$.

2) $z = 0$ булсын. Ул вакытта

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Моннан $x=1$, $y=1$ һәм $B(1; 1; 0)$. M ноктасы аша үтүче яссылык $\overrightarrow{AB}\{1; 5; 3\}$ векторына перпендикуляр булырга тиеш. Яссылык тигезләмәсе түбәндәге рәвешне ала:

$$1(x - 1) + 5(y - 1) + 3(z - 1) = 0,$$

ягъни

$$x + 5y + 3z - 9 = 0.$$

Җавап. $x + 5y + 3z - 9 = 0$.

Кабатлау эшләре

Кб—1

1 *вар*. **1.** 1) Чалышма; 2) чалышма; 3) чалышма.

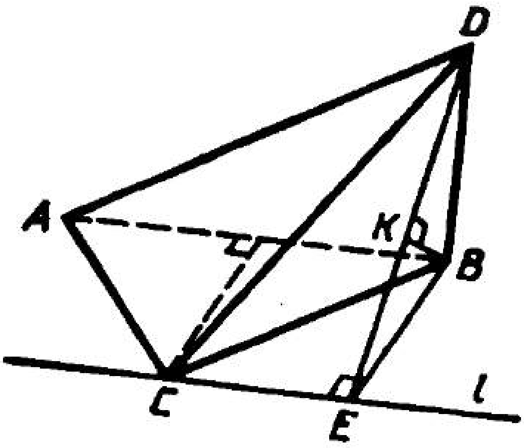
2. Турыпочмаклык; $\frac{2a^2}{9}$.

3. 1) 60°. 2) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

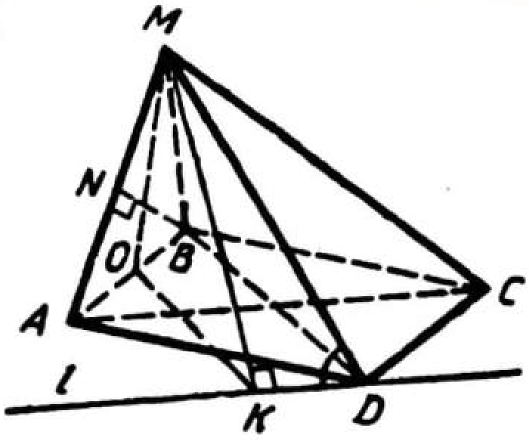
4. $\arcsin\frac{3\sqrt{7}}{7}$. Яки $90° - \arcsin\frac{2\sqrt{3}}{3}$ җавабы булырга мөмкин.

5. AB һәм DC арасындагы почмакны табу өчен $l \parallel AB$ (рәс. 44) турысын үткәрәбез. DC һәм l арасындагы почмак — эзләнелгән почмак була. B ноктасыннан l га BE перпендикуляры төшерәбез һәм E ноктасын D ноктасы белән тоташтырабыз. $DE \perp CE$ икәнен исбатлау җиңел.

$$DE = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}\left(BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}\right);\ CE = \frac{a}{2}.$$



Рәс. 44



Рәс. 45

Ул вакытта

$$\operatorname{tg} \angle DCE = \frac{DE}{CE} = \sqrt{7} \text{ һәм } \angle DCE = \operatorname{arctg}\sqrt{7}.$$

Җавап. $\operatorname{arctg}\sqrt{7}$.

6. *CDE* яссылыгы *AB* га перпендикуляр: $CDE \parallel AB$. *AB* һәм *DC* турылары арасындагы ераклык *AB* турысыннан *CDE* яссылыгына кадәр ераклыкка тигез. Аның *DBE* өчпочмагын *BK* биеклегенә тигез икәнлеген исбатларга мөмкин (рәс. 44).

$$BK = \frac{BE \cdot DB}{DE} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a \cdot 2}{2 \cdot a \cdot \sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Җавап. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

2 *вар*. **1.** 1) Чалышма; 2) чалышма; 3) кисешүче.

2. Турыпочмаклы трапеция; $\frac{3a^2\sqrt{5}}{8}$.

3. 1) arctg 2; 2) 90°.

4. 30°. **5.** 60°. **6.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Күрсәтмә. 5 һәм 6 мәсьәләләр 1 вариантның 5 һәм 6 мәсьәләләре кебек чишелә.

3 *вар*. **1.** 1) Чалышма; 2) чалышма; 3) параллель.

2. Тигезьянлы трапеция; $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

3. 1) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. 45°.

5. Кирәкле булган барлык төзүләр 45 рәсемдә күрсәтелә.

$$OK = \frac{3a\sqrt{2}}{4}; \quad MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad MK = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{18a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{30}}{4}; \quad KD = \frac{a\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{tg} MDK = \frac{MK}{KD} = \frac{a\sqrt{30} \cdot 4}{4 \cdot a\sqrt{2}} = \sqrt{15}; \quad \angle MDK = \operatorname{arctg}\sqrt{15}.$$

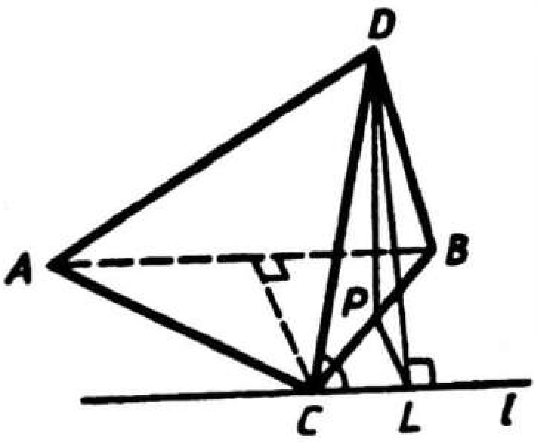
Җавап. $\operatorname{arctg}\sqrt{15}$.

6. BC һәм MD арасындагы ераклык AMB өчпочмагының BN биеклегенә тигез. $BC \| AMD$. Ә BN ның BC һәм AMD яссылыгына, ягъни күрсәтелгән чалышма турылар арасындагы ераклыкка тигез икәнлеген исәпкә алырга кирәк.

Җавап. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

4 *вар.* **1.** 1) Чалышма; 2) чалышма; 3) чалышма.

2. Тигезьянлы өчпочмак; $\frac{a^2\sqrt{15}}{16}$.



Рәс. 46

3. 1) arctg 2; 2) arctg$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. arctg $\frac{\sqrt{39}}{13}$.

5. 1) 90°; 2) arcsin$\frac{\sqrt{15}}{4}$. Күрсәтмә. 46 рәсемдә күрсәтелгән төзүләрне кара.

6. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Кб—2

1 *вар.* 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{1}$; 2) $8(13 + \sqrt{34})$. Күрсәтмә. Призманың перпендикуляр кисемен төзергә һәм, перпендикуляр кисем периметрының ян кабыргага тапкырчыгышы буларак, ян өслек мәйданын табарга кирәк; 3) arcsin $\frac{3\sqrt{2}}{10}$.

2 *вар.* 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$; 2) $8(\sqrt{3} + \sqrt{7})$; 3) 2arctg$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3 *вар.* 1) $24(\sqrt{6} + \sqrt{15})$. Күрсәтмә. Ян өслек мәйданын ян кырларның мәйданнарын кушу юлы белән һәм CC_1B_1B кырының турыпочмаклык икәнен исәпкә алып табарга мөмкин; 2) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$; 3) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$. Күрсәтмә. Алдагы пунктта күрсәтелгән кисемне төзегәндә барлыкка килгән өчпочмак биеклеге эзләнелгән ераклык була.

4 *вар.* 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{17}$. Күрсәтмә. Кисем яссылыгы нигез яссылыгын $AF(O \in AF)$ биссектрисасы буйлап кисеп үтә, биссектриса исә нигезне 5 : 6 чагыштырмасында бүлә. Бу очракта $S_{AFB} = \frac{5}{11} S_{ABC}$; 2) 128; 3) arcsin$\frac{32\sqrt{41}}{205}$.

Кб—3

1 *вар*. 1) $32\pi\sqrt{3}$; 2) $180°\sqrt{3} \approx 311°46'$; 3) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{27}$; 4) 256π.

2 *вар*. 1) 64π; 2) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi} \approx 35°19'$; 3) әйе, мөмкин; $\frac{V_ш}{V_{цил}} = \frac{2}{3}$; 4) 128π.

3 *вар*. 1) 100π; 2) $\frac{1625\pi\sqrt{3}}{12}$; 3) $180°$, 15 һәм 5; 4) $ABCD$ — кисек конусның күчәр кисеме, $AD = 15$, $BC = 5$, $AB = CD = 10$. Камаучы шарның радиусы ABD өчпочмагын камаучы әйләнәнең радиусына тигез була.

$$BD=\sqrt{100 + 225 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \tfrac{1}{2}} = 5\sqrt{7};\ 5\sqrt{7} = 2R_ш \cdot \sin 60°.$$

Моннан

$$R_ш = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \quad \text{һәм} \quad S = 4\pi\frac{25 \cdot 7}{3} = \frac{700\pi}{3}.$$

Җавап. $\frac{700\pi}{3}$.

4 *вар*. 1) $36\pi\sqrt{2}$; 2) 36. Күрсәтмә. Иң зур мәйданны күчәр киселе алып тора; 3) $\frac{V_{кон}}{V_{цил}} = \frac{1}{6}$; 4) AMB өчпочмагы—конусның күчәр кисеме булсын. Ул вакытта камаулы әйләнәнең радиусы—конус эченә камалган шар радиусы була. Шар үзәге O конус биеклеген, нигездән башлап, $1 : \sqrt{2}$ чагыштырмасында бүлә. Моннан түбәндәге тигезлекләрне табабыз:

$$R_ш = \frac{6}{\sqrt{2}+1} = 6(\sqrt{2}-1), \quad V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = 288\pi(\sqrt{2}-1)^3.$$

Җавап. $288\pi(\sqrt{2}-1)^3$.

Кб—4

1 *вар*. **1.** 1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. $C_1(3; -2; 5)$, $B_1(-1; -1; 5)$ һәм $E(2; 0; 5)$; $\overrightarrow{AE}\ \{1; -2; 3\}$, $\overrightarrow{CB}\ \{-4; 1; 3\}$ икәне ачык. Шарт буенча яссылык CB_1 гә перпендикуляр. Бу очракта φ — эзләнелә торган почмак булганлыктан:

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB_1}|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|},$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB_1} = -4 - 2 + 9 = 3. \quad |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{14}; \quad |\overrightarrow{CB_1}| = \sqrt{26}.$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} = \frac{3\cdot\sqrt{91}}{182};\quad \varphi = \arcsin\frac{3\sqrt{91}}{182}.$$

Җавап. $\arcsin\frac{3\sqrt{91}}{182}$.

2 *вар.* **1.** 2) E ноктасы — ACның уртасы, ә F — MB ның уртасы булсын.

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB});\quad \overrightarrow{EF}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\cdot\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CB}).$$

1 пунктта $AM \perp CB$ икәнлеге исбатланган иде. Шуңа күрә

$$\overrightarrow{EF}^2 = \frac{1}{4}(4a^2 + a^2 + 0) = \frac{5a^2}{4}.$$

Моннан $EF = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Җавап. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

2. $ABCD$ пирамидасының нигезе $z = 2$ яссылыгында ята. Ул вакытта, шарттан чыгып, пирамида биеклеге $H = 3$ икәнлеге табыла.

$\overrightarrow{AC}\{-2; 4; 0\}$, $\overrightarrow{BD}\{5; 0; 0\}$, $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{BD}| = 5$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = -10$.

Әгәр φ — нигезләрнең диагональләре арасындагы почмак булса:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$S_{\text{ниг}} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\sin\varphi;$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 5\frac{2}{\sqrt{5}} = 10.$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot 10\cdot 3 = 10.$$

Җавап. 10.

3 *вар.* **1.** 1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. Күрсәтмә. Кубны турыпочмаклы координаталар системасына урнаштырырга һәм AC_1 диагоналенең A_1DB яссылыгына перпендикуляр икәнлеген исәпкә алырга кирәк. Әгәр φ — эзләнелә торган почмак булса:

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}.$$

4 *вар*. **1.** 1) $\overrightarrow{EM}$ векторын $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ һәм $\overrightarrow{AD}$ базис векторларына таркатабыз:

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} =$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD});$$

$$\overrightarrow{EM}^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}) =$$

$$= \frac{1}{9}(a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}) = \frac{a^2}{4}; \quad EM = \frac{a}{2}.$$

Җ а в а п. $\frac{a}{2}$.

2. $\arccos\frac{\sqrt{33}}{11}$. К ү р с ә т м ә. *MO* — пирамиданың биеклеге булсын. Ул чагында *O* ноктасын координаталар башлангычы дип санарга, *Ox* күчәрен *OA* нуры юнәлешендә юнәлтергә, *Oy* күчәрен—*BC* һәм *AD* нурлары юнәлешендә, ә *Oz* күчәрен *OM* нуры буенча юнәлтергә кирәк.

Контроль эшләр

К—1

1 *вар*. **1.** 60°.

2. 1) 90°; 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. $A(0; y; 0)$ һәм φ — эзләнелә торган почмак булсын.

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}\,\vec{j}})|; \quad \overrightarrow{AB}\{1; \ -y; \ 1\}; \quad \vec{j}\{0; \ 1; \ 0\};$$

$$\sin\varphi = \left|\frac{-y}{\sqrt{2+y^2}\cdot 1}\right| = \frac{1}{2}; \quad \frac{y^2}{2+y^2} = \frac{1}{4}.$$

Моннан $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Җ а в а п. $\left(0; \ \sqrt{\frac{2}{3}}; \ 0\right)$ яки $\left(0; \ -\sqrt{\frac{2}{3}}; \ 0\right)$.

4*. $a\,\{6k; 8k; -7{,}5k\}$ булсын.

$$\sqrt{36k^2 + 64k^2 + \frac{225}{4}k^2} = \frac{25}{2}|k|.$$

Шарт буенча $\frac{25}{2}|k| = 50$. Моннан $|k| = 4$. $\vec{a}$ векторы һәм $\vec{j}\,\{0; 1; 0\}$ векторы арасындагы почмак — җәенке. Димәк, $\widehat{\vec{a}\,\vec{j}} < 0$. $0 + 8k - 0 < 0$ икәне билгеле. Моннан $k < 0$ һәм $k = -4$.

Җ а в а п. $\vec{a}\{-24; -32; 30\}$.

2 *вар*. **1.** 1) $180° - \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $\sqrt{2}$.

2. $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ һәм $\vec{CC_1}$ базис векторларын тикшерик. $AC = CB = BB_1 = a$ булсын.

$$\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}; \quad \vec{CB_1} = \vec{CB} + \vec{CC_1}.$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CB_1}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CB_1}|};$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CB_1} = (\vec{CB} - \vec{CA})(\vec{CB} + \vec{CC_1}) = a^2 - a^2\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 - 0 = \frac{3a^2}{2}.$$

$$|\vec{AB}| = a\sqrt{3}; \quad |\vec{CB_1}| = a\sqrt{2}.$$

$$\cos\varphi = \frac{3a^2}{2a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Җ а в а п. $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$.

3. $A(x; x; 0)$ һәм φ — эзләнелә торган почмак булсын.

$$\sin\varphi = |\cos(\vec{AB}\ \vec{i})|; \quad \vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}; \quad \vec{AB}\{x-1;\ x-1;\ -1\}.$$

$$\sin\varphi = \frac{|x-1|}{\sqrt{2(x-1)^2+1}} = \frac{1}{2}; \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2+1} = \frac{1}{4};$$

$$4(x-1)^2 = 2(x-1)^2 + 1; \quad 2(x-1)^2 = 1; \quad x - 1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ яки } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Җ а в а п: $A\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ яки $A\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

4*. $OM\ \{x;\ y;\ z\}$ булсын. Шарттан $7x = 0$ һәм $3z = 0$ икәнлеге килеп чыга. Димәк, эзләнелә торган күплек — Oyz һәм Oxy яссылыкларының кисешү сызыгы, ягъни Oy күчәре була.

Җ а в а п. Oy күчәре.

3 *вар*. **1.** $2\sqrt{5}$.

2. 1) $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

3. $A(0; 0; 2\sqrt{6})$ яки $A(0; 0; -2\sqrt{6})$.

4*. $\vec{b}\left\{\frac{8}{3};\ -\frac{10}{3};\ \frac{13}{3}\right\}$. Мәсьәлә 1 вариант мәсьәләсе кебек чишелә.

4 *вар.* 1) $\frac{2\sqrt{22}}{11}$; 2) $\sqrt{5}$.

2. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. $M\left(\sqrt{2}+1;\ 0;\ \sqrt{2}+1\right)$ яки $M(1-\sqrt{2};\ 0;\ 1-\sqrt{2})$.

4*. *Ox* күчәре.

К—2

1 *вар.* **1.** $4\pi(\sqrt{2}+4)$.

2. 1) $4\pi R^2\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi$; 2) $\frac{R^2}{2}$. Күрсәтмә. $\varphi = 30°$ булганлыктан, төзүчеләр арасындагы иң зур почмак — җәенке почмак була, шунлыктан иң зур мәйдан — төзүчеләре үзара перпендикуляр урнашкан кисемнеке була. Мондый кисемнең мәйданы $\frac{L^2}{2}$ гә тигез.

3*. A_1 *B* һәм *C* нокталарының координаталары $A(\sqrt{3};\ 0;\ 0)$, $B(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 3)$. *O* ноктасыннан *AB* га *OK* перпендикулярын төшерәбез һәм *K* ноктасын *C* ноктасы белән тоташтырабыз. $\angle CKO = \varphi$ — эзләнелгән почмак.

$$OK = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{OC}{OK} = \frac{3\cdot 2}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Җавап. $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{6}$.

2 *вар.* **1.** $48\pi\sqrt{2}$.

2. 1) $18R^2\sqrt{3}$; 2) $\pi R\sqrt{3}$.

3*. Сфераның тигезләмәсе түбәндәге рәвешне ала:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2 = 32.$$

Сфераның үзәге $O(1;\ 2;\ 0)$. *T* — орыну ноктасы булсын. Ул вакытта *OTM* өчпочмагы — турыпочмаклы ($\angle OTM = 90°$). $OM=\sqrt{64+1+16} = 9$; $MT = \sqrt{81-32} = 7$.

3 *вар.* **1.** $4\pi a^2\sqrt{3}$.

2. 1) $\frac{4\pi a^2}{3\sin^2 2\alpha}$; 2) 30°.

3*. *A* һәм *B* нокталарының координаталарын табабыз: $A(0;\ -2;\ 0)$; сферада яткан *B* ноктасының координаталары $B(1;\ 1;\ z)$. Сфера тигезләмәсеннән чыгып табабыз:

$$0+1+z^2 = 5;\quad z = \pm 2.$$

$z < 0$ булганлыктан, $B(1;\ 1;\ 2)$.

$$AB = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}.$$

B ноктасыннан xOz яссылыгына төшерелгән перпендикулярның озынлыгы 2 гә тигез. Әгәр φ — эзләнелә торган почмак булса:

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}, \quad \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

4 *вар*. **1.** $\frac{3\pi\sqrt{5}}{2}$. **2.** 1) $6a^2$; 2) $\frac{3\pi a^2}{16}$.

3*. Бирелгән яссылык Oxy яссылыгын $K(4;\ 2;\ 0)$ ноктасы аша үтүче туры буйлап кисә, һәм Ox күчәрен A ноктасында, ә Oy күчәрен B ноктасында кисеп үтә. Шарттан чыгып, AOB өчпочмагы — тигезьянлы, һәм $AO = OB = 6$. Бу өчпочмакның OP биеклеге $3\sqrt{2}$ гә тигез. Бу ара шар үзегеннән бирелгән яссылыкка кадәр ераклык була да инде; $d = 3\sqrt{2} < R$. Ул вакытта кисешү сызыгының радиусы:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}.$$

Моннан эзләнелә торган әйләнә озынлыгының $2\pi\sqrt{7}$ икәнлеге килеп чыга.

К—3

1 *вар*. **1.** 192. **2.** $\frac{2\pi d^3 \operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha \cdot tg\varphi}$.

3*. 47 нче рәсемдә $\angle DEO = 60°$ — ян кыр яссылыгы һәм нигез яссылыгы белән төзелгән икекырлы почмакның сызыкча почмагы. EO_1 — бу почмакның биссектрисасы, O_1 — камаулы шарның үзәге, $OO_1 = O_1K$ $(O_1K \perp DE)$ — бу шарның радиуслары. MK — шар өслеге пирамиданың ян өслегенә орынган әйләнәнең радиусы. $\angle MO_1K = \angle DEO = 60°$; $MO_1 = \frac{1}{2}O_1K$ — шар үзегеннән кисем яссылыгына кадәр ераклык.

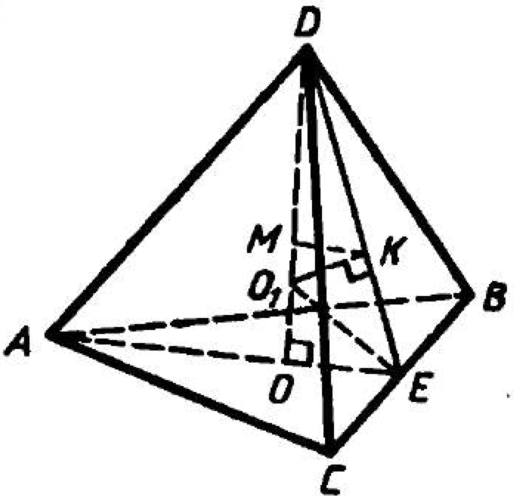
$$R_ш = OE \cdot \operatorname{tg}30° = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$h_{сегм.} = R_ш - MO_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

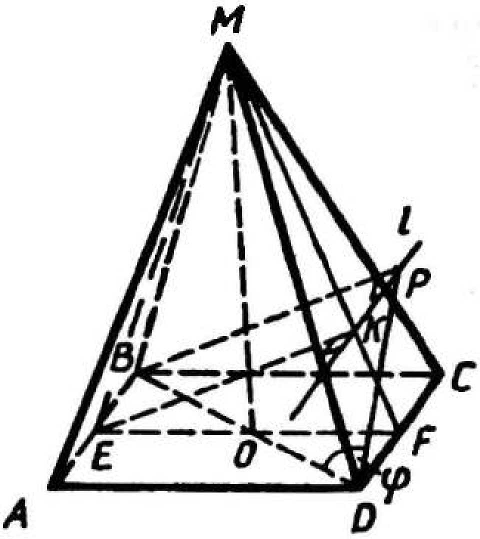
$$V_{сегм.} = \pi \cdot \frac{4 \cdot 3}{9}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}.$$

2. *вар*. **1.** 1024. **2.** $\frac{\pi R^3 \cos\alpha \cdot tg\varphi}{3}$.

3*. Призманың диагонале — призма тирәсенә камалган шарның диагонале була, һәм ул $8\sqrt{5}$ кә тигез. Диагональләргә перпендикуляр булган яссылык призманы 1 : 3 чагыштырмасында бүлгәнлектән, бу яссылык шардан кисеп алган кечерәк сегментның биеклеге $2\sqrt{5}$ кә тигез була. Шарның радиусы $4\sqrt{5}$ кә тигез.



Рәс. 47



Рәс. 48

$$V_{\text{сегм}} = \pi \cdot 20\left(4\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{200\pi\sqrt{5}}{3}.$$

3 *вар.* **1.** $\frac{2048}{9}$. **2.** $\frac{2\pi m\sqrt[3]{\cos\varphi}}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}$.

3*. $\frac{320\pi}{81}$. Күрсәтмә. Мәсьәлә 1 варианттагы 3* мәсьәлә кебек чишелә.

4 *вар.* **1.** $\frac{16\sqrt{6}}{3}$. **2.** $\frac{\pi h^3 \operatorname{ctg}^3\varphi}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

3*. Камаучы шарның үзәге призманың нигезен камап торучы әйләнә үзәге аша үткәрелгән биеклекнең уртасында ята. Бу вакытта $R_{\text{ш}} = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + R^2}$, биредә H — призманың биеклеге, R — нигезне камаучы әйләнәнең радиусы; $H = 2\sqrt{2}$, $R = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $R_{\text{ш}} = \sqrt{2 + \frac{32}{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. Шарның үзәгеннән ян кырга кадәр ераклык нигез эченә камалган әйләнә радиусына тигез, ягъни $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Бу очракта $h_{\text{сегм}} = \frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

$$V_{\text{сегм}} = 2\pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.$$

К—4

1 *вар.* **1.** 48. **2.** $12\sqrt{7}$. **3.** $\arccos\frac{3}{4}$. **4.** 36. **5.** $\frac{625\pi}{7}$.

6*. 48 нче рәсемдә $DABC$ дүртпочмаклы төзек пирамидасы сурәтләнгән. EMF яссылыгы (ME һәм MF — пирамиданың апофемалары) нигез яссылыгына перпендикуляр; $EK \perp MF$, $EK \perp DMC$ икәнлеген исбатларга мөмкин. AB һәм EK аша, DMC яссылыгын

AB турысына параллель булган l турысы аша кисеп уза торган яссылык үткәрелгән. Бу яссылыкта $BP \| EK$. Ул вакытта $BP \perp DMC$ һәм $\angle BDP = \varphi$ — BD һәм DMC яссылыгы арасындагы почмак. $BP = EK$ икәнлеген исәпкә алырга кирәк, $BP = EK$, $MF = 4$, $MO = \sqrt{7}$, $EK \cdot MF = MO \cdot EF$. Моннан

$$EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{\sqrt{7} \cdot 6}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

$$\sin\varphi = \frac{BP}{BD} = \frac{3\sqrt{7}}{2 \cdot 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{8};$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

2 *вар*. **1.** $6\sqrt{39}$. **2.** $12\sqrt{3}$ **3.** $\arccos\frac{4}{5}$. **4.** -12. **5.** $\frac{32\pi}{81}(\sqrt{13}-2)^3$.

6*. 49 нчы рәсемдә $MABC$ өчпочмаклы төзек пирамидасы сурәтләнгән; MK — пирамиданың апофемасы. AMK яссылыгында $AE \perp MK$ ны үткәрәбез. $AE \perp BMC$ икәнлеген исбатларга мөмкин, $MK = \sqrt{13}$, $AO = 4$, $MO = 3$.

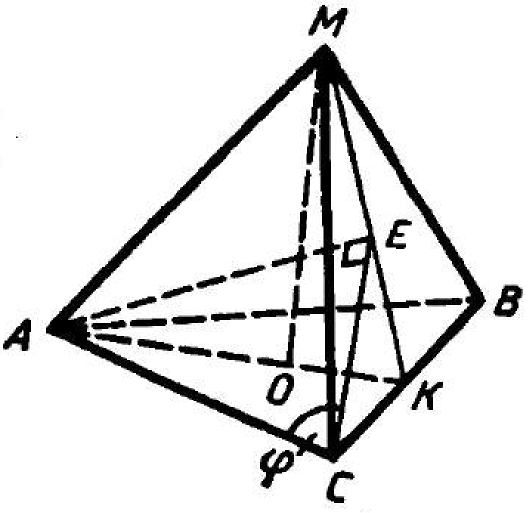
$$AK \cdot MO = AE \cdot MK;$$

$$AE = \frac{AK \cdot MO}{MK} = \frac{6 \cdot 3}{\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{3}}{13}.$$

$\angle ACE = \varphi$ — AC һәм BMC яссылыгы арасындагы почмак.

$$\sin\varphi = \frac{AE}{AC} = \frac{18\sqrt{13}}{13 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{39}}{26};$$

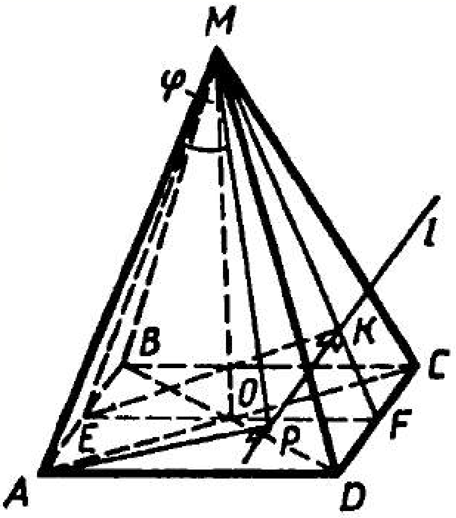
$$\varphi = \arcsin\frac{3\sqrt{39}}{26}.$$



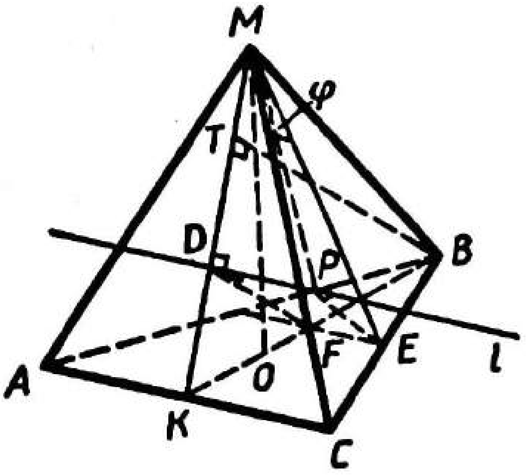
Рәс. 49

3 *вар*. **1.** $32\sqrt{7}$. **2.** $\frac{128\sqrt{3}}{3}$. **3.** $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}$. **4.** 48. **5.** $\frac{2048\sqrt{3}}{27}$.

6*. 50 нче рәсемдә $MABCD$ дүртпочмаклы төзек пирамидасы сурәтләнгән; $EK \perp DMC$. AB һәм EK аша үтүче яссылык DMC яссылыгын $l \| AB$ турысы буенча кисеп үтә. Бу яссылыкта $AP \| EK$ турысын үткәрәбез. Ул вакытта $AP \perp DMC$ һәм $\angle AMP = \varphi$ — AM һәм BMC яссылыгы арасындагы почмак, $OC = 4$, $MO = 4\sqrt{3}$, $AC = 8$, $EF = CD = 4\sqrt{2}$, $FC = 2\sqrt{2}$, $MF = \sqrt{64-8} = 2\sqrt{14}$; $EK \cdot MF = MO \cdot EF$. Моннан



Рәс. 50



Рәс. 51

$$EK = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2}}{2\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}};$$

$$AP = EK;$$

$$\sin\varphi = \frac{AP}{AM} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \quad \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

4 *вар*. **1.** $6\sqrt{3}$. **2.** 3. **3.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.** -3. **5.** $\frac{4}{3}\pi$.

6*. 51 нче рәсемдә $MABC$ өчпочмаклы төзек пирамидасы сурәтләнгән: $BT \perp AMC$. BC ның уртасы булган E ноктасы аша AC га параллель туры үткәрәбез. Ул BK ны F ноктасында кисеп үтә. KMB яссылыгында $FD \parallel BT$ ны төзибез. Ул чагында $FD \perp AMC$. EF һәм FD аша үтә торган яссылык AMC яссылыгын $l \parallel EF$ буенча кисә. Ул яссылыкта $EP \parallel FD$ ны төзибез. Ул вакытта $EP \perp AMC$ һәм $EP = FD$. $\angle PME = \varphi$ — ME белән AMC яссылыгы арасындагы почмак, $MO = \sqrt{3}$, $BK = 3$, $ME = MK = 2$, $BT \cdot KM = MO \cdot KB$,

$BT = \frac{MO \cdot KB}{KM} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $PD = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. $EP = FD$ булганлыктан,

$$EP = \frac{3\sqrt{3}}{4}; \quad \sin\varphi = \frac{PE}{ME} = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad \varphi = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Мөстәкыйль һәм контроль эшләрнең дәреслек пунктлары буенча бүленеше

Эшләр	Тема	Дәреслек пункты
М—1	Пространствода турыпочмаклы координаталар системасы. Векторның координаталары	42, 43
М—2	Векторлар һәм нокталарның координаталары арасында бәйләнеш. Координаталарга иң гади мәсьәләләр	44, 45
М—3	Векторлар арасындагы почмак. Векторларның скаляр тапкырчыгышы	46, 47
М—4	Пространстводагы турылар арасындагы почмакларны исәпләү	48
М—5	Хәрәкәтләр	49—52
М—6	Пространстводагы хәрәкәтләрне мәсьәләләр чишүдә куллану	49—52
М—7	Цилиндр. Цилиндр белән күпкырлыклар комбинацияләре	53, 54
М—8	Конус, кисек конус	55, 56, 57
М—9	Әйләнү җисемнәренең өслек мәйданы. Конус һәм күпкырлыкларның комбинацияләре	56, 57
М—10	Сфера тигезләмәсе. Сфера белән яссылыкның үзара торышы	58, 59, 60
М—11	Сфера	58—62
М—12	Сфера белән башка геометрик җисемнәрнең комбинацияләре	—"—
М—13	Туры параллелепипедның күләме	64
М—14	Туры призманың һәм цилиндрның күләме	65, 66
М—15	Авыш призманың күләме	68
М—16	Пирамиданың күләме	69
М—17	Конусның күләме	70
М—18	Кисек пирамиданың һәм кисек конусның күләме	69, 70
М—19	Шарның һәм аның өлешләренең күләме. Сфера мәйданы	71, 72, 73
ӨМ	Яссылык тигезләмәсе	
Кб—1	Туры һәм яссылыкларның үзара торышы. Туры һәм яссылыкларның перпендикулярлыгы	

Эшләр	Тема	Дәреслек пункты
Кб—2	Күпкырлыклар	
Кб—3	Әйләнү җисемнәре	
Кб—4	Координаталар һәм векторлар	
МД—1	Координаталар һәм векторлар	V б.
МД—2	Цилиндр, конус, шар	VI б.
МД—3	Җисемнәрнең күләмнәре	VII б.
К—1	Координаталар һәм векторлар	V б.
К—2	Цилиндр, конус, шар	VI б.
К—3	Җисемнәрнең күләмнәре	VII б.
К—4	Йомгаклау	

ЭЧТӘЛЕК

Кереш 3

Мөстәкыйль эшләр 5

Кабатлау эшләре 52

Математик диктантлар 57

Контроль эшләр 62

Җаваплар һәм күрсәтмәләр 68

Мөстәкыйль эшләр 68

Кабатлау эшләре 115

Контроль эшләр 118

Учебное издание

Зив Борис Германович

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

для 11 класса татарской средней общеобразовательной школы

(перевод с русского на татарский язык)

Редакция мөдире *Р. С. Вафина*
Редакторы *Ф. М. Хафизова*
Бизәлеш редакторы *Р. А. Сәйфуллина*
Техник редакторы *М. И. Данилевская*
Корректоры *А. А. Халитова*

Нәшриятка 183 нче номерлы лицензия 1997 елның 7 апрелендә бирелгән. Җыярга тапшырылды 30.03.98. Басарга кул куелды 09.04.01. Форматы $60\times90^1/_{16}$. «Газетная» кәгазе. «Школьная» гарнитурасы. Офсет басма. Басма табагы 8,0. Нәшер-хисап табагы 5,87. Тиражы 5 100 д. Заказ В-72.

«Мәгариф» нәшрияты. 420111. Казан, Бауман урамы, 19.
Издательство «Магариф». 420111. Казань, ул. Баумана, 19.
Тел./факс (8432) 92-57-48.

ДУП «Полиграфия-нәшрият комбинаты».
420111. Казан, Бауман урамы, 19.